Alvaro Fabiano Pereira de Macêdo
MATEMÁTICA FINANCEIRA
EDUFERSA

Alvaro Fabiano Pereira de Macêdo

MATEMÁTICA FINANCEIRA

Equipe multidisciplinar
Antônio Charleskson Lopes Pinheiro – Diretor de Produção de Material Didático
Ulisses de Melo Furtado – Designer Instrucional
Celeneh Rocha de Castro – Diretora de Formação Continuada
Thiago Henrique Freire de Oliveira – Gerente de Rede
Adriana Mara Guimarães de Farias – Programadora
Camilla Moreira Uchoa – Webdesigner
Ramon Ribeiro Vitorino Rodrigues - Diretor de Arte
Alberto de Oliveira Lima – Diagramador
José Antonio da Silva - Diagramador
Frediano Araújo de Sousa – Ilustrador
Mikael Oliveira de Meneses – Produção de E-Books

Arte da capa
Felipe de Araújo Alves

Equipe administrativa
Rafaela Cristina Alves de Freitas – Assistente em Administração
Iriane Teresa de Araújo – Responsável pelo fomento
Bruno Layson Ferreira Leão – Estagiário

Equipe de apoio
Márcio Vinicius Barreto da Silva – Revisão Linguística
Nayra Maria da Costa Lima – Revisão Didática
Iriane Teresa de Araújo – Revisão Conceitual
Lauro Cesar Bezerra Nogueira – Revisão Conceitual

Serviços técnicos especializados
Life Tecnologia e Consultoria

Edição
EdUFERSA

Impressão
Imprima Soluções Gráfica Ltda/ME

Biblioteca Central Orlando Teixeira – BCOT/UFERSA
Setor de Informação e Referência – Ficha Catalográfica

M141m Macêdo, Álvaro Fabiano Pereira de.
Matemática financeira / Álvaro Fabiano Pereira de Macêdo. – Mossoró : EdUFERSA, 2014.
96 p. : il.

ISBN: 978-85-63145-59-8

1. Matemática financeira. 2. Matemática. I. Título.

RN/UFERSA/BCOT CDD: 650.01513

Bibliotecário-Documentalista
Mário Gaudêncio, M.Sc. (CRB-15/476)

http://nead.ufersa.edu.br/

APRESENTAÇÃO DA DISCIPLINA

O conteúdo apresentado nesse curso tem por objetivo levá-lo a solucionar problemas do cotidiano como por exemplo a melhor forma de comprar à vista ou a prazo? Ou ainda de vender um bem à vista ou a prazo? Como otimizar o uso dos seus recursos (gastar da melhor forma possível). No momento de contrair uma dívida, analisar as melhores alternativas disponíveis. Enfim qualquer questão que envolva dinheiro e o seu melhor uso é observada na Matemática Financeira.

Você já parou para pensar que a todo instante estamos decidindo o que fazer e que a maioria dessas decisões envolve recursos, então utilizá-los da melhor forma pode contribuir com o desenvolvimento pessoal, profissional e empresarial. Se em algum momento da sua vida você ficou em dúvida em comprar à vista ou a prazo, ou quanto ao valor pago pelo empréstimo, é porque a Matemática Financeira é importante na sua vida.

Provavelmente você conhece pessoas que estão em dificuldade financeira ou devem muito e pensam "não sei cadê meu dinheiro", "não sobra pra nada". Esstas frases são citadas no dia-a-dia por todos. Mas será que realmente falta dinheiro ou nossa forma de planejamento está errada? Nossas decisões interferem diretamente no resultado do cotidiano.

Segundo os autores Mathias e Gomes independentemente dos recursos tecnológicos disponíveis hoje, aprender Matemática Financeira somente é possível com esforço e muito treino, sem nenhum tipo de atalho, seguindo sempre o passo a passo. Assim quanto mais o aluno dominar seus conceitos obterá melhor proveito do conteúdo.

O lado bom de estudar Matemática Financeira é porque vivemos e aplicamos os conceitos no nosso dia-a-dia, o que facilita nosso aprendizado.

Assim, faça um bom uso desse material para aprimorar e adquirir conhecimento sobre o mundo das finanças que nos acompanha diariamente.

SOBRE O AUTOR

Alvaro Fabiano Pereira de Macêdo, possui graduação em Ciências Contábeis pela Universidade Estadual da Paraíba (2003) e mestrado em Ciências Contábeis pela Universidade de Brasília (2005). Doutorando em Administração pela PUC-PR. Atualmente é professor assistente dedicação exclusiva da Universidade Federal Rural do Semi-Árido. Tem experiência na área de Administração, com ênfase em Teoria da Contabilidade e Finanças, atuando principalmente nos seguintes temas: Finanças Comportamentais, Tomada de Decisão, Teoria da Contabilidade, Finanças Corporativas, Tomada de Decisão e Informações Contabeis para usuários externos.

SUMÁRIO

UNIDADE I - CAPITALIZAÇÃO SIMPLES E COMPOSTA

UNIDADE II - RENDAS CERTAS OU ANUIDADES

UNIDADE III - SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO DE EMPRÉSTIMOS

I

CAPITALIZAÇÃO SIMPLES E COMPOSTA

Seja bem-vindo à nossa primeira unidade!

Nas aulas 1 e 2, vamos estudar um pouco sobre juros simples e compostos, termos que serão utilizados durante todo o nosso curso e servem de base para toda operação relacionada à Matemática Financeira.

Operações financeiras em grande parte baseiam-se em duas formas de capitalização: simples e composta. A taxa básica de juros da economia representa o custo básico do dinheiro da economia. Quanto maior a taxa, maior será o custo do dinheiro, tanto para o consumidor quanto para as empresas. A contrapartida está na remuneração das aplicações, que também se eleva e pode desestimular o consumo e os investimentos na produção.

O aspecto principal da matemática Financeira reside no fato de sempre estarmos verificando a situação do dinheiro no tempo, ou seja, o tempo é um fator essencial para o dinheiro.

Finalmente, o aspecto mais relevante desta seção será destacar a melhor alternativa financeira, tanto para quem empresta quanto para quem toma o capital emprestado, a fim de que a transação seja mais lucrativa ou menos onerosa.

Objetivos:

- Apresentar os principais conceitos utilizados no estudo da Matemática Financeira;
- Conhecer a nomenclatura utilizada na Matemática Financeira
- Conceituar juros e analisar sua função dentro de operações financeiras;
- Apresentar a diferença entre juros simples e compostos;
- Distinguir os diferentes regimes de capitalização.
- Conceituar juros compostos e analisar sua função dentro de operações financeiras;
- Apresentar a diferença entre juros simples e compostos.
- Distinguir equivalência de capitais nas operações financeiras;
- Conhecer os conceitos fundamentais da equivalência de capitais;
- Verificar as possibilidades de aplicação da equivalência de capitais.

Conceitos essenciais de juros simples e compostos

A disciplina Matemática Financeira é um ramo que estuda as alterações do valor do dinheiro com o passar do tempo, assim como apresenta diversos mecanismos que permitem avaliar como essas alterações ocorrem com o passar do tempo. Possui linguagem própria, que possibilita a leitura e interpretação pelo olhar das finanças. Deste modo, alguns conceitos são fundamentais para esta leitura na ótica das finanças.

Banco de Dados/NEaD

Entender Matemática Financeira é entender como funciona o mundo do dinheiro, as transações de compra e venda, empréstimo, prestações, juros, dívidas e todas as operações que envolvem dinheiro. O intuito principal é analisar o valor do dinheiro no tempo, pois R$ 1.000,00 hoje não terá o mesmo poder de compra que R$ 1.000,00 daqui a 1 ano e vice-versa, assim descobrir como e porque o valor do dinheiro muda ao longo do tempo é o objetivo principal da Matemática Financeira.

E para aprendermos o conteúdo da Matemática Financeira alguns conceitos são essenciais, sem os quais não é possível ler e aprender sobre o tema. Segue alguns destes conceitos:

AGENTE ECONÔMICO
É uma pessoa física ou jurídica que pratica um evento financeiro, como uma compra, venda ou empréstimo que possua consequências financeiras. Como exemplo, podemos citar quando você vai ao supermercado e faz compras: você está realizando um evento financeiro.

CAPITAL (C), CAPITAL INICIAL (C0) OU PRINCIPAL (P)
É o valor disponível representado por moeda (dinheiro) ou outro bem que uma pessoa ou uma empresa possui, como uma máquina, mercadorias, um imóvel; enfim, tudo que pode ser convertido em dinheiro. Este capital permite que aconteçam as trocas entre bens, possibilitando os eventos financeiros.

OPERAÇÃO FINANCEIRA
É a transferência de capital entre quem possui capital (o credor) e quem necessita desse capital (o tomador), desde que estabelecidas as condições necessárias para a realização da operação. Tais condições estabelecem: valor da operação, prazo, taxa de juros contratada, garantias por parte do tomador, etc.

JURO (J)
É o valor remunerado (pago) ao capital acordado entre as partes, o tomador e o credor em uma operação financeira.

MONTANTE (M) ou (Cn)
Podemos conceituar montante como a soma do capital (C) mais os juros (J) de uma operação financeira.

VALOR PRESENTE (VP)
É o valor de uma operação financeira hoje. É um valor intermediário entre o montante (M) e o capital (C).

VALOR FUTURO (VF ou FV)
É o valor de um recurso ou operação em uma data futura. Por vezes, é citado como sinônimo de montante.

TAXA DE JUROS
A taxa de juros é a relação entre o capital emprestado e o juro devido.

DATA FOCAL
É a data a ser considerada como base de comparação de valores referidos a datas diferentes, é conhecida também como data de avaliação ou data de referência.

EQUAÇÃO DE VALOR
É a equação que possibilita realizar a igualdade de capitais diferentes, em períodos diferentes, trazidos para uma mesma data focal com taxa de juros fixada.

CUSTO DE OPORTUNIDADE DO CAPITAL
Representa a ação de você abrir mão de uma decisão por outra, como por exemplo, deixar o dinheiro na poupança ou investir em uma renda fixa.

FLUXO DE CAPITAIS
Representa um deslocamento do capital (dinheiro), ou seja, é o movimento do dinheiro. Geralmente quando falamos deste tema nos referimos aos recursos que circulam em âmbito de países como o fluxo de capital entre os países em desenvolvimento principalmente os pertencentes aos BRIC'S que são: Brasil, Rússia, Índia, China e África do Sul.

ANUIDADES OU RENDAS CERTAS
São pagamentos ou recebimentos feitos ao longo do tempo.

AMORTIZAÇÃO
É o processo de pagamento de uma dívida.

CAPITALIZAÇÃO
É o processo de constituição de um capital futuro.

TERMOS OU PARCELAS
Representam os valores que devem ser pagos ou recebidos ao longo do tempo.

PERÍODO
Representa o intervalo de tempo existente entre dois termos consecutivos.

PRAZO
É o tempo de duração da renda.

CREDOR
Pessoa ou instituição que fornece o empréstimo.

DEVEDOR
Pessoa ou instituição que recebe o empréstimo.

ENCARGOS FINANCEIROS
Custo da operação (juros) para o devedor que retorna para o credor.

AMORTIZAÇÃO
Pagamento do principal (capital emprestado), geralmente por meio de parcelas periódicas.

IOF
Imposto sobre Operações Financeiras.

SALDO DEVEDOR
Valor da dívida em um determinado momento, depois de deduzido o valor já pago ao credor a título de amortização.

PRESTAÇÃO
É composta pela soma do valor da amortização mais os encargos financeiros devidos em determinado período.

CARÊNCIA
É o período concedido ao credor para início do pagamento do principal. Pode também ser utilizada para postergar o início do pagamento dos juros.

RECOMENDAÇÕES

Antes de seguir ao próximo tópico veja as seguintes questões, se tiver dúvida em responder alguns dos conceitos faça uma releitura do material e apenas em seguida continue. Se não tiver dúvida siga em frente.

1. Defina juros capital
2. Defina juros
3. Defina operação financeira

TÓPICOS ADICIONAIS	ONDE ENCONTRAR / O QUE FAZER
LINKS DA INTERNET	1. www.financasforever.com.br; 2. www.somatematica.com.br; 3.www.bcb.gov.br; 4.www.concurseirosdeelite.blogspot.com.br/2012/02/download-matematica-financeira-para.html
SUGESTÕES DE LEITURA	1. Capítulo 1 do livro Matemática Financeira e suas aplicações de Assaf Neto (2012). 2.Capítulo 1 do livro Matemática Financeira de Washington Franco Mathias e José Maria Gomes.

SAIBA MAIS

POR QUE SE COBRA JURO?

É comum questionarmos por que se cobra uma taxa de juros tão elevada nas operações financeiras. A composição da taxa de juros leva em conta que o possuidor do dinheiro, ao se dispor a emprestar seu patrimônio, está atento para os seguintes fatores:

• Nem sempre o tomador do empréstimo paga sua dívida ao possuidor do dinheiro (risco de crédito);

• É possível que o tomador do empréstimo atrase o pagamento da sua dívida (risco de liquidez);

• O possuidor do dinheiro deseja ter lucro ao emprestar seu patrimônio;

• O possuidor do dinheiro precisa precaver-se quanto a uma possível desvalorização do capital ao longo do tempo;

• Todo empréstimo implica despesas operacionais, contratuais e tributárias tais como impostos;

• Existe a possibilidade de perdas em função do risco-país; e

• Há a possibilidade do não-retorno do investimento em função de problemas operacionais da instituição onde os recursos foram aplicados.

Extraído da obra de Castanheira e Macedo (2008)

EXERCÍCIO PROPOSTO

Faça as palavras cruzadas abaixo com perguntas ligadas ao nosso conteúdo

1. Pagamentos feitos ao longo do tempo.
2. Valor disponível representado por moeda (dinheiro).
3. Valor de remuneração ao capital.
4. É a soma do capital mais os juros.
5. Pessoa ou instituição que empresta dinheiro.
6. Quem toma ou recebe dinheiro emprestado.
7. Quem deve e não paga fica.
8. Parte dos recursos guardados por uma pessoa.
9. Aumento de preço de um produto é chamado.
10. Período concedido ao credor para o início do pagamento.

D	I	J	X	C	C	V	B	N	M	J	K	J	L	Q
A	N	U	I	D	A	D	E	C	F	H	G	T	A	W
X	F	R	S	E	R	U	I	R	Y	F	C	V	S	E
C	L	O	A	V	E	Q	P	E	D	E	F	E	D	R
A	A	B	U	E	N	L	O	D	P	L	N	T	E	P
P	Ç	N	U	D	C	Ç	P	O	U	P	A	N	C	A
I	A	M	M	O	I	P	I	R	B	O	M	C	R	T
T	O	R	T	R	A	M	I	R	A	T	O	S	T	Y
A	A	A	X	B	N	N	M	B	V	C	U	R	V	I
L	C	M	O	N	T	A	N	T	E	A	S	D	C	U
H	F	D	S	E	R	T	Q	A	D	R	I	O	P	O
I	N	A	D	I	M	P	L	E	N	T	E	B	C	V

Juros simples

Conceito de Juro(s)

Banco de Dados/NEaD

O termo juro (s) vem de uma premissa básica da economia que diz que os recursos são escassos. Voltando um pouco ao passado, na época do escambo tínhamos a troca de bens entre indivíduos que não possuíam uma moeda. Foi a partir da invenção da moeda que as trocas entre bens ficaram mais bem evidenciadas ou compreensíveis. A moeda trouxe outro avanço importante: a possibilidade de ao invés de trocar bens por outros, trocá-los por dinheiro.

Mathias e Gomes (2013) definem juro como o custo do crédito ou a remuneração de uma aplicação; é o pagamento pela utilização do poder aquisitivo durante um período de tempo. Logo, quem toma dinheiro emprestado pagará juros e quem empresta receberá juros. Mathias e Gomes (2013) acrescentam ainda que as pessoas têm pref erência temporal em consumir ao invés de poupar. Assim temos a seguinte fórmula para calcular os juros:

$$J = C \times i \times n$$

Onde:

J = juro

C = capital

i = taxa de juros

n = prazo de aplicação

Taxa de juros

Segundo Mathias e Gomes (2013), a Taxa de Juros é determinada por meio de um coeficiente referido a um intervalo de tempo. Este coeficiente corresponde à remuneração do capital empregado por um prazo igual àquele da taxa. A taxa de juros é a relação entre o capital emprestado e o juro devido.

Portanto, conclui-se que taxa de juros é a razão entre os juros (J) e o principal (P) ou capital (C). Simbolicamente, representamos o juro pela letra "i", onde $i = \frac{J}{P}$

Onde,

i = corresponde à taxa de juros;

J = representa o juro; e

P = é o valor principal ou presente.

A taxa de juros pode ser apresentada de duas formas, a saber:

Em termos percentuais, a mais utilizada em nosso cotidiano, representa o valor pago a cada cem unidades financeiras na unidade de tempo. É o que se obtém depois de dividir o capital por 100.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1 - Um indivíduo tomou R$ 100.000,00 emprestados no banco e pagou R$ 140.000,00 após um ano.

Pergunta-se:

a) Quanto foi o juro pago?

b) Qual foi a taxa de juros aplicada nessa operação?

Sabemos que o juro é a diferença entre o que tomamos emprestado e o que pagamos. Assim, temos: R$ 140.000,00 - R$ 100.000,00 = R$ 40.000,00

Temos que encontrar a razão entre o valor pago referente aos juros e o valor do capital. Logo, temos:

$$\text{Taxa de juros} = \frac{40.000,00}{200.000,00} = 0,20$$

Ou em termos percentuais = $\frac{20}{100}$ que é igual a 20% a.a.

Exemplo: Qual o juro pago em um empréstimo de R$ 1.000,00 aplicado por dois anos a taxa de 5% ao ano?

Resolução:

O primeiro passo é transformar a taxa que está em percentual (5%) para taxa unitária, logo teremos $5\% = \frac{5}{100} = 0,05$

Assim temos: Juro = 1.000,00 x 0,05 x 2 → R$ 10,00 x 5 x 2 = R$ 100,00

Logo, R$ 100,00 é o juro pago pelo empréstimo em dois anos.

Em termos unitários, é o valor cobrado ou pago por uma unidade financeira na unidade de tempo.

Para transformar de percentual para unitária, basta dividir por 100 e de unitária para percentual multiplicar por 100.

Forma percentual	Transformação	Forma unitária
15% a.a.	$\frac{15}{100}$	0,15 a.a.
10% a.s.	$\frac{10}{100}$	0,10 a.s.
3% a.t.	$\frac{3}{100}$	0,03 a.t.
1% a.m.	$\frac{1}{100}$	0,01 a.m.

Então, sempre que estivermos calculando juros temos que realizar as transformações necessárias.

Cálculo do juro

Quando trabalhamos com juros simples, a remuneração do capital (principal) é diretamente proporcional ao seu valor e ao tempo de aplicação. A fórmula básica para o cálculo é:

$$J = C \times i \times n$$

Onde:

J = juro;

C = capital inicial ou principal;

i = taxa de juros (unitária);

n = prazo de aplicação.

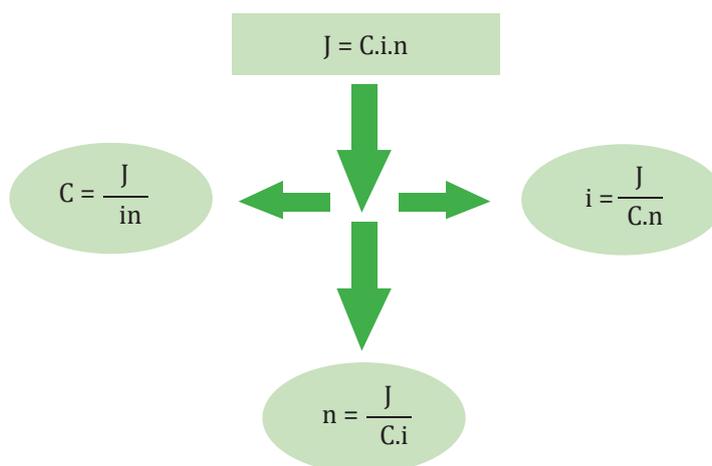
Exemplo: Admita um empréstimo de R$ 2.000,00 em um prazo de dois anos e com taxa de 10% a.a. Qual o valor pago como juro?

Resolução: Capital inicial (C) = R$ 2.000,00

Taxa de juros (i) = 10% a.a.

Número de períodos (n) = 2 anos

Desta forma, temos: J=C×i×n. Logo, J = 2.000,00 x 0,10 x 2 = R$ 400,00

A fórmula básica de juros pode ser descrita de forma algébrica da seguinte forma

Em Matemática Financeira com 03 elementos da fórmula podemos obter o quarto elemento que falta, então geralmente o elemento faltante é o que queremos determinar.

Cálculo do montante

Como vimos anteriormente, o montante é a soma do capital com os juros. Logo, temos a fórmula M = C + J. Como vimos que J = C x i x n, podemos derivar a fórmula de montante para M = C + Cin. Desta maneira, temos que:

$$M = C\,(1 + i\,n).$$

Exemplo: Admita um empréstimo de R$ 2.000,00 em um prazo de dois anos e com uma taxa de 10% a.a. Qual o montante após dois anos?

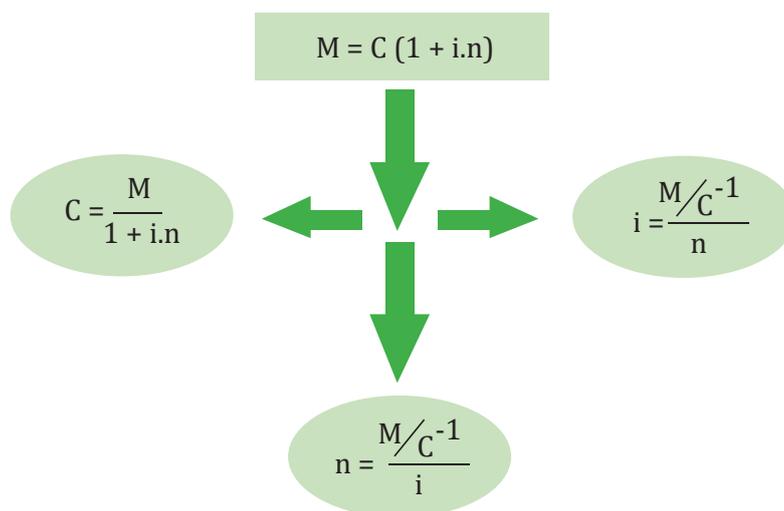
Resolução: Capital inicial (C) = R$ 2.000,00

Taxa de juros (i) = 10% a.a.;

Número de períodos (n) = 2 anos;

M = C (1+in);

M = 2.000,000 (1+ 0,10 x 2) = R$ 2.400,00.

Assim como no caso da fórmula dos juros, a fórmula do montante também apresenta derivações que permitem você encontrar um dos fatores que falta. Volto a repetir que esse fator geralmente é o que se pergunta nas questões.

Taxa proporcional

Conforme Assaf Neto (2012) a compreensão destas taxas exige o reconhecimento de que toda operação envolve dois prazos a saber: (a) o prazo a que se refere a taxa de juros; e (b) o prazo de capitalização de ocorrência dos juros.

Considere duas taxas de juros distintas i_1 e i_2 relacionadas a dois períodos também distintos n1 e n2. Dizemos que essas taxas são proporcionais se o quociente das taxas e o quociente dos períodos forem iguais:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Exemplo: Verifique se as taxas de 4% ao bimestre e 24% ao ano são proporcionais.

Resolução:

i_1 = 4% a.b. = 0,04 a.b.

i_2 = 24% a.a = 0,24 a.a

n_1 = 2 meses

n_2 = 12 meses

Assim: $\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_1}{n_2}$

$$\frac{0,04}{0,24} = \frac{2}{12}$$

Temos que são grandezas proporcionais, uma vez que o produto dos meios (0,24 x 2) é igual ao produto dos extremos (0,04 x 12). Conclui-se, portanto, que são taxas proporcionais.

Taxa equivalente

Como saberemos se duas taxas são equivalentes? Aplicamos um mesmo capital às taxas em um mesmo intervalo de tempo; se ambas produzirem o mesmo juro serão consideradas equivalentes. Sejam a taxa de juros i referente ao período 1 e i_m referente a fração 1/m teoricamente equivalentes. Quando trabalhamos com juros simples, taxas de juros proporcionais são equivalentes.

Exemplo: Suponha um capital de R$ 20.000,00, aplicado de duas formas: 2% a.m. ou 24% a.a., aceitando um prazo de três anos. Verifique se são equivalentes.

Resolução:

Aplicando a 2% a.m. em um prazo de três anos (36 meses), temos: J = 20.000,00 x 0,02 x 36 = R$ 14.400,00

Agora aplicando a 24% a.a. em um prazo de três anos (36 meses), temos: J = 20.000,00 x 0,24 x 3 = R$ 14.400,00

Logo, constata-se que o valor pago a título de juros é o mesmo para as duas operações.

Concluímos, portanto, que 2% a.m. é equivalente a 24% a.a.

Períodos não-inteiros

Podemos ter situações nas quais o prazo da aplicação (n) não é um número inteiro de período em relação à taxa dada, sendo necessário levar em consideração as frações dos períodos. Nesses casos, temos dois passos a seguir: primeiramente calcula-se o juro da parte inteira do período. Em seguida, calculamos a taxa proporcional à fração de período restante e o juro correspondente. O somatório dos juros será o valor de juro pago nessa operação.

Exemplo: Determine o juro de um capital de R$ 3.000,00, aplicado a uma taxa de 6% ao semestre em um prazo de três anos e nove meses?

Resolução:

Como são 3 anos e 9 meses temos 7 semestres (3 anos + 1 semestre + 3 meses).

O 1º cálculo é determinar o juro do período inteiro: J_1 = 3.000,00 x 0,06 x 7 = 1.260,00

O 2º cálculo é determinar o juro do período não-inteiro:

O im representa a taxa equivalente trimestral, pois temos uma taxa semestral (6%a.s.) e queremos encontrar a taxa trimestral, uma vez que 01 semestre tem 02 trimestres.

$$i_m = \frac{i}{m} = \frac{0,06}{2} = 0,03 \text{ a.t.}$$

J2 = 3.000,00 x 0,03 x 1 = 90,00

De tal modo, o total de juros é 1.260,00 + 90,00 = R$ 1.350,00

Sabendo que três meses são iguais a 1/2 semestre, podemos resolver também das seguintes formas: 3.000,00 x 0,06 x 7,5 = R$ 1.350,00.

VOCÊ SABIA?

O ano civil tem 365 dias, mas no nosso caso vamos trabalhar com o ano comercial que tem 360 dias. Assim, nosso mês tem 30 dias. Fique ligado!

Juro exato e juro comercial

Geralmente nas operações de curto prazo o regime geralmente adotado é o de juros simples e os prazos são fixados em dias fazendo-se necessário determinar a taxa proporcional referente a 1 dia. Mathias e Gomes (2013) apresentam dois enfoques dependendo do número de dias adotado: (a) ano civil com 365 dias; e (b) ano comercial com 360 dias.

Na maioria das operações do cotidiano utilizamos o juro comercial e não o juro exato

Denomina-se juro exato aquele que é obtido quando o período (n) está disposto em dias e quando isso ocorre, adota-se a convenção de ano civil.

Onde: $J = \frac{Cin}{365}$

Já por juro comercial temos aquele que é obtido quando se adota como base o ano comercial.

Onde: $J = \frac{Cin}{360}$

Vejamos a diferença no resultado, com o seguinte exemplo:

Determinando a taxa de juros diária (juro exato e juro comercial) a partir de uma taxa anual de 15%. Onde:

Juro exato:

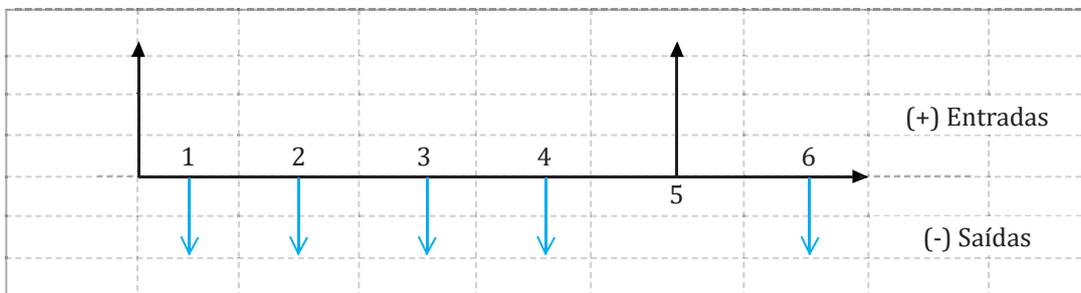
$\frac{15\%}{365 \text{ dias}} = 0{,}032877\%$ ao dia

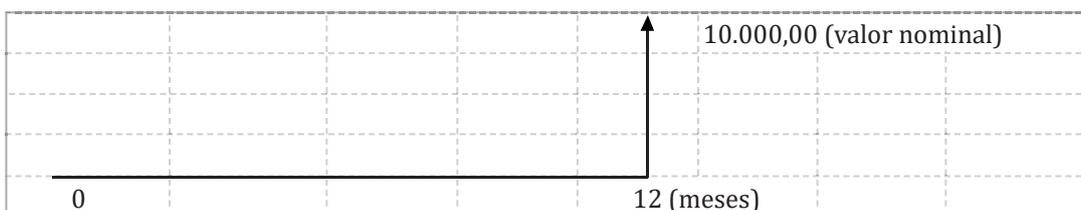
Juro comercial:

$\frac{15\%}{360 \text{ dias}} = 0{,}033333\%$ ao dia

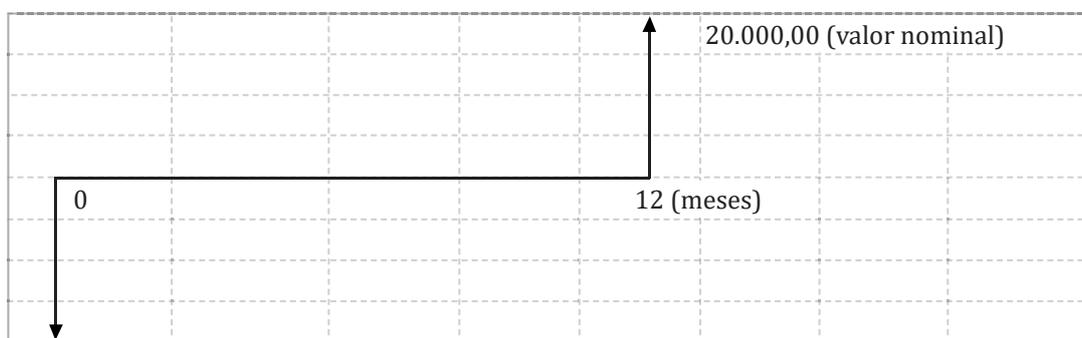
O juro comercial diário é superior ao juro exato pelo menor número de dias considerado. No desconto comercial é necessário distinguir a taxa de desconto utilizada na operação e a taxa que efetivamente é cobrada na operação.

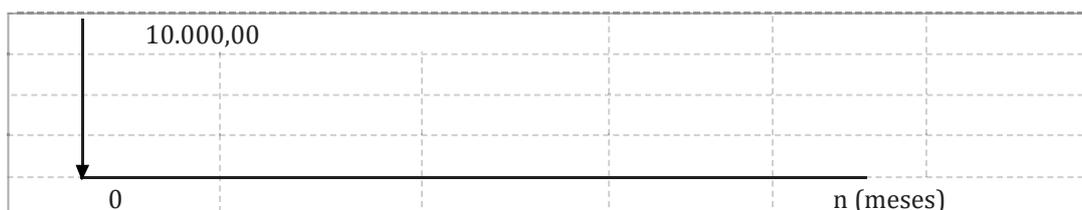
Valor nominal, valor atual e valor futuro

Os problemas financeiros dependem basicamente do fluxo do dinheiro no tempo e é mais conhecido na prática por fluxo de caixa. Esse fluxo representa as entradas e saídas de recursos, conforme disposto abaixo. (MATHIAS; GOMES, 2013)

O valor nominal define-se pelo valor de um compromisso na data de seu vencimento, passado o dia de pagamento e o saldo não tenha sido pago o valor nominal permanece e será acrescido os juros e multas acertados na data inicial da operação.

Vejamos a figura abaixo:

Pelo gráfico percebe-se que no 12º mês o valor do capital é de R$ 10.000,00. Ou seja, se um indivíduo aplicou determinada quantia hoje, dada uma taxa de juros, receberá esse valor daqui a 12 meses.

Já o valor atual é definido pelo valor de um compromisso antes da data de seu vencimento, para determinar esse valor necessitamos do valor nominal, uma data de cálculo e uma dada taxa de juros para utilização na operação.

Vejamos a figura abaixo:

E por fim temos o valor futuro que é definido pelo valor do título em momento posterior ao que estamos trabalhando.

Vejamos a figura abaixo:

SAIBA MAIS!

Quando estamos trabalhando com matemática financeira devemos sempre ter em mente que estamos a procura de determinado valor em uma data definida seja no presente, no passado ou no futuro, daí vem a utilização dos conceitos disposto acima. Tempo e dinheiro são um dos elementos mais relevantes quando estamos estudando matemática financeira.

Descontos

Sempre que realiza-se uma operação financeira entre dois ou mais agentes econômicos recebe-se um documento que comprove a execução da mesma, no geral são entregues títulos de crédito comercial, devendo estes documentos apresentar todas as características da operação, tais como: data da operação, valor, tipo de operação se à vista ou a prazo. Os títulos mais utilizados nas transações financeiras são: Nota Promissória, Duplicatas, Recibos, etc.

Segundo Mathias e Gomes (2013) existem dois tipos de desconto: (a) desconto racional ou "por dentro"; e (b) desconto comercial ou "por fora"

O desconto racional é definido como o desconto obtido pela diferença entre o valor nominal e o valor atual de um compromisso, representa em outras palavras a quantia a ser abatida do valor nominal. A

fórmula do desconto racional é:

$$Dr = \frac{Nin}{1+in}$$

Onde:

N = valor nominal (ou montante);

n = número de períodos antes do vencimento;

i = taxa de desconto;

D_r = valor do desconto;

V_r = valor atual;

Se quisermos obter o valor descontado devemos utilizar a seguinte fórmula:

$$Vr = \frac{N}{1+in}$$

Exemplo:

José pretende saldar um título de R$ 4.000,00, três meses antes de seu vencimento, sabendo-se que a taxa de juros é de 20% a.a., qual será o desconto que ele vai obter?

Resolução: primeiro extraímos as informações disponíveis, depois entendemos o que o exemplo quer dizer, e ai é só resolver. Vamos lá!

N = 4.000,00

n = 3 meses

Calculamos a taxa proporcional, pois temos uma taxa anula e queremos realizar o pagamento três meses antes

$$i12 = \frac{0,20}{12} = 0,0166$$

O valor do desconto é:

$$Dr = \frac{Nin}{1+in} = \frac{4.000,00 \times 0,0166 \times 3}{(1+0,0166 \times 3)} = \frac{199,92}{1,05} = 190,40$$

Logo o valor descontado é: R$ 4.000,00 - R$ 190,40 = R$ 3.809,60

O desconto comercial é definido como o valor que se obtém pelo cálculo do juros simples sobre o valor nominal do compromisso a ser quitado antes do seu vencimento. A fórmula do desconto comercial é:

$$Dc = Nin$$

Onde:

N = valor nominal (ou montante);

n = número de períodos antes do vencimento;

i = taxa de desconto;

D_c = desconto comercial;

V_c = valor atual;

Se quisermos obter o valor do desconto devemos utilizar a seguinte fórmula:

$$Vc=N\ (1-in)$$

Exemplo:

José pretende saldar um título de R$ 4.000,00, três meses antes de seu vencimento, sabendo-se que a taxa de juros é de 20% a.a., qual será o desconto que ele vai obter?

Resolução: o desconto comercial é obtido pela aplicação da fórmula. Vamos lá!

$D_c = Nin$

$D_c = 4.000,00 \times 0,01666 \times 3$

D_c = R$ 200,00

O valor do desconto comercial é:

$V_c = N\ (1- in)$

$V_c = 4.000,00\ (1- 0,01666 \times 3)$

$V_c = 4.000,00 \times 0,95$

$V_c = 3.800,00$

Perceba o valor obtido no desconto do comercial para o racional. Assim podemos notar no desconto comercial que é necessária a separação entre a taxa de desconto utilizada na operação e a taxa efetivamente cobrada pelo banco. Podemos obter da seguinte forma:

$i' = \frac{200,00}{3.800,00}$ = 0,052 ao trimestre ou 0,208 a.a. em termos percentuais representa 20,8%

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1 - Suponha que você aplicou na poupança o valor de R$ 18.000,00, e após quatro meses (tempo) resgatou a quantia de R$ 21.456,00. Determine a taxa de juros mensal cobrada nessa operação.

Resolução:

C = 18.000,00

M = 21.456,00

n = 4 meses

i = ?

$M = C\ (1+i \times n)$

$21.456,00 = 18.000,00 \times (1 + i \times 4)$

$\frac{21.456,00}{18.000,00} = 1 + 4i$

$1,192 = 1 + 4i$; $i = \frac{0,192}{4} = 0,048$, que é equivalente a 4,8% a.m.

2 . Um indivíduo tem dívidas junto a uma instituição financeira no valor de R$ 35.000,00 com vencimento em três meses e outra no valor de R$ 65.000,00 com vencimento em cinco meses. Para efetuar o pagamento, o indivíduo pretende utilizar uma poupança de que dispunha. Nestas condições, quanto ele deve aplicar na poupança, sabendo que seu rendimento é de 66% a.a?

Resolução:

i = 66% a.a. (66%/12 = 5,5%)

$$C = \frac{35.000,00}{(1+ 0,055 \times 3)} + \frac{65.000,00}{(1 + 0,055 \times 5)}$$

C = 30.042,92 + 50.980,39 = 81.023,31

Logo, se depositar hoje (data focal zero) a quantia de R$ 81.023,31, ele terá a quantia necessária para quitar a dívida.

3 . Determine o valor dos juros e do Montante de um empréstimo de R$ 50.000,00, dada uma taxa de juros simples de 5% a.m. em um período de três trimestres.

Resolução:

C= 50.000,00

i = 5% a.m.

n = 3 trimestres = 9 meses

Juros = ? ;

J = C x i x n; J = 50.000,00 x 0,05 x 9 = 22.500,00

Montante = ?

M = C + J; M = 50.000,00 + 22.500,00

4 . Joaquim adquiriu um título de renda fixa por R$ 30.000,00 com prazo de vencimento de 15 meses e uma taxa de juros de 12% a.a. Após um ano, ele resolveu vender o título. Determine o valor recebido por Joaquim, sabendo-se que no momento da venda a taxa de juros era de 18% a.a.

Resolução:

Primeiramente, temos que determinar o valor a ser resgatado no vencimento:

C = 30.000,00

i = 12% a.a = 0,12

n = 15 meses que equivale a $\frac{15}{12}$ = 1,25 anos

Aplicando a fórmula de juros simples, temos:

C = 30.000,00 (1 + 0,12 x 1,25) = 34.500,00

Porém, como ele vendeu antes do prazo determinado, temos que considerar como data focal, a data da venda (12 meses). Este valor deve ser calculado pela taxa de juros vigente no mercado no momento da venda, ou seja, 18% a.a.

Assim, temos:

Valor na data 12 meses = 34.500,00

i = 18% a.a.

$n = 3 \text{ meses} = \frac{3}{12} = 0,25$

Neste caso, o valor presente é determinado por:

$$VP = \frac{VF}{(1 + i \times n)} = \frac{34.500,00}{(1 + 0,18 \times 0,25)} = 33.014,35$$

Então, como adquiriu o título por R$ 30.000,00 e vendeu por R$ 33.014,35, o valor adquirido por Joaquim foi de R$ 3.014,35.

5 . Determine após quanto tempo (meses) um investimento dobra de valor, considerando uma taxa de juros de 10% a.a.

Resolução:

M = C x (1 + i x n)

$\dfrac{\left(\frac{M}{C} - 1\right)}{i}$	=	$\dfrac{\left(\frac{2 \times C}{C} - 1\right)}{i}$	=	10 anos	120 meses

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Determine o capital necessário para termos R$ 18.000,00 de juros dada uma taxa mensal de 3% no prazo de:

a) 60 dias;

b) 80 dias;

c) 110 dias.

2. Um aparelho de LCD é vendido à vista por R$ 1.800,00 ou com entrada de 30% e uma parcela de R$ 1.306,00 em 30 dias, pergunta-se qual a taxa de juros dessa operação?

3. Qual o valor do juro resultante de um capital de R$ 400.000,00 dada uma taxa de 72% a.a. durante um período de 45 dias?

4. Um investidor aplicou em um Recibo de Depósito Bancário (RDB) por 90 dias com taxa de 21,60% a.a. Após o vencimento, ele reaplicou todo o valor resgatado a uma taxa de 23,76% a.a. durante dois meses. Sendo o valor futuro da reaplicação igual a R$ 109.573,84, determine o valor do capital inicial.

5. A Investimentos S/A faz um contrato com um banco de investimento pelo qual se obriga a depositar durante um ano, no início de cada mês, o valor de R$ 100.000,00 com juros de 15% a.a. (contabilizados) mensalmente. Qual será o montante possuído pela empresa ao término do contrato?

6. Suponha um título com valor atual equivalente a 4/5 de seu valor nominal e com um prazo de aplicação de 15 meses. Determine a taxa de juros considerada.

7. (FISCAL FORTALEZA/CE 2003) Um título no valor de R$ 20.000,00 sofre um desconto comercial simples de R$ 1.800,00 três meses antes de seu vencimento. Calcule a taxa mensal de desconto aplicada.

a) 6%

b) 5%

c) 4%

d) 3,3%

e) 3%

8. (ANALISTA CVM/2001) um título de valor de face R$ 100.000,00 vence em 31 de julho. Calcule o desconto comercial simples no dia 11 de julho, a uma taxa de desconto de 6% a.m. (Dica! como a taxa é mensal e queremos saber o valor dentro do próprio mês, temos que encontrar a taxa diária)

a) R$ 4.000,00

b) R$ 3.000,00

c) R$ 2.000,00

d) R$ 1.500,00

e) R$ 1.000,00

9. Um capital de R$ 6.600,00 após 7 meses rendeu R$ 1.090,32 de juros. Qual foi a taxa de juros aplicada nessa operação?

10. (TCE/TCM-RJ 2000) um crédito foi descontado pela modalidade desconto comercial simples seis meses antes de seu vencimento a uma taxa de desconto de 10% a.m. totalizando um desconto de R$ 30.000,00. Se fosse aplicada a modalidade desconto racional simples o valor do desconto seria:

a) R$ 18.250,00

b) R$ 18.750,00

c) R$ 19.200,00

d) R$ 19.750,00

e) R$ 20.500,00

GABARITO

1. a) 300.000,00
   b) 225.000,00
   c) 163.636,36
   d) 21.077,28

2. i = 3,65% a.m.
3. R$ 36.000,00
4. R$ 100.000,00
5. R$ 1.297.500,00
6. i = 0,1666 ou 1,6%
7. Letra e
8. Letra a
9. 2,36% a.m. ou 32,30% a.a.
10. Letra b

RECOMENDAÇÕES

Antes de seguir ao próximo tópico veja as seguintes questões, se tiver dúvida em responder algum dos conceitos volte ao material e apenas em seguida continue. Se não tiver dúvida siga em frente.

1. Defina Juros
2. Defina taxas equivalentes
3. Você consegue distinguir valor nominal, atual e futuro?

TÓPICOS ADICIONAIS	ONDE ENCONTRAR / O QUE FAZER
LINKS DA INTERNET	1.voceeseudinheiro.com; 2.www.somatematica.com.br; 3.www.concurseirosdeelite.blogspot.com.br/2012/02/download-matematica-financeira-para.html; 4. maisativos.com.br
SUGESTÕES DE LEITURA	1. Capítulos 1, 2 e 3 do livro Matemática Financeira e suas aplicações de Assaf Neto (2012). 2.Capítulos 1 e 2 do livro Matemática Financeira de Washington Franco Mathias e José Maria Gomes. 3. Capítulo 3 do livro Matemática Financeira objetiva e aplicada de Abelardo de L. Puccini (2011)
SUGESTÕES DE EXERCÍCIOS ADICIONAIS	1. Capítulos 1, 2 e 3 do livro Matemática Financeira e suas aplicações de Assaf Neto (2012). 2. Capítulos 1 e 2 1 do livro Matemática Financeira de Washington Franco Mathias e José Maria Gomes (2013).

"Os juros compostos são a mais poderosa invenção humana"

(Albert Einstein)

dia de pagamento

Banco de Dados/NEaD

Juros Compostos

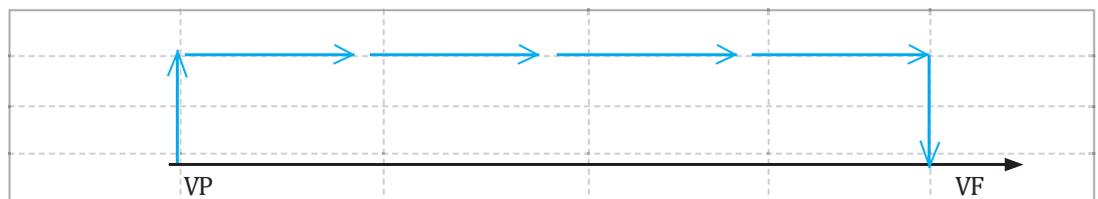
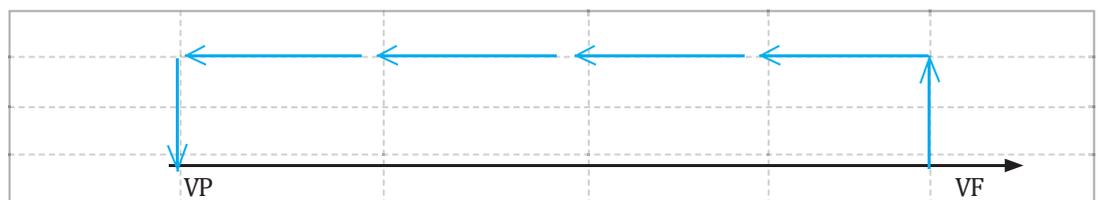
Quando vimos na seção anterior os juros simples, entendemos que ele representava um valor calculado em cima do valor da dívida, e que o mesmo valor se repetiria mês a mês ou ano a ano conforme fosse contratada a operação. No entanto juros simples quase não aparecem nas operações financeiras, na sua grande maioria prevalece o regime de juros compostos que veremos com mais detalhes agora.

Esta modalidade de regime é a mais utilizada no dia-a-dia pelo sistema financeiro. Nesta modalidade, os juros gerados a cada período são incorporados ao principal para calcular os juros do período seguinte. Então, os rendimentos auferidos pela aplicação serão incorporados à aplicação, participando da geração do rendimento no período seguinte.

Quando trabalhamos com juros compostos, o dinheiro cresce muito mais rapidamente. Neste caso, temos um crescimento exponencial em progressão geométrica ao longo do período. Este modelo nos leva àquela expressão que escutamos no nosso cotidiano: "juro sobre juro". O modelo descrito acima é conhecido também como regime de capitalização composta.

Vejamos o seguinte exemplo: Um capital (C) de R$ 1.000,00 aplicado a taxa (i) de 10% a.m. durante quatro meses (n). O montante ao término do período pode ser obtido diretamente na fórmula: $M=C(1+i)^n$

$M=C(1+i)^n$ Logo, teríamos $M = 1.000,00\ (1+0,1)^4$ = R$ 1.464,10. Segundo Samanez (2002), os fatores $(1 + i)^n$ e $(1+ i)^{-n}$ têm a seguinte finalidade:

- O fator $(1 + i)^n$ "joga" grandezas para frente, possibilitando encontrar o montante ou valor futuro da aplicação. É a capitalização para data posterior.

- O fator $(1+ i)^{-n}$ "puxa" grandezas para trás, possibilitando encontrar o principal de um determinado montante, ou seja, traz um valor futuro à data anterior.

Vejamos que a diferença entre as situações acima residem no tempo que estamos querendo trazer o valor (dinheiro), seja em uma data futura $(1 + i)^n$ ou para uma data antes do vencimento $(1+ i)^{-n}$.

DICA!

Se você quiser saber o valor no futuro, capitaliza o dinheiro. Se quiser trazer do futuro para o presente, "traz a valor atual".

Conceito de Juros Compostos

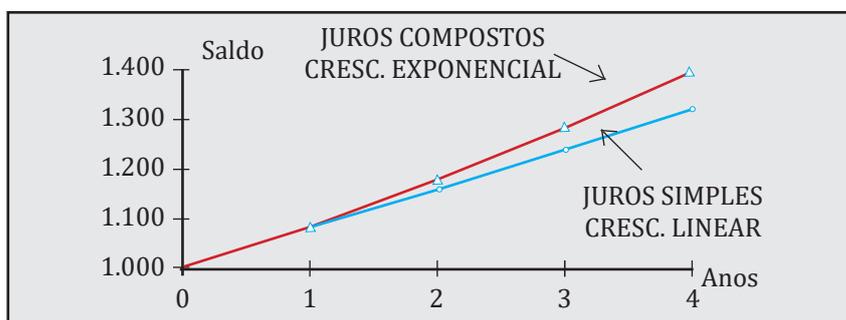
Nesse regime consideramos que os juros formados em cada período são adicionados ao capital formando o montante (capital + juros) do período, esse montante passa a ser o novo capital e irá incidir juros sobre esse novo capital e assim sucessivamente. Dizemos ainda que os juros são capitalizados, e como não apenas o capital inicial rende juros, denominamos juros compostos. Entendemos, então, que a composição do capital mais os juros transformam-se em um novo capital.

Cada vez que os juros são incorporados ao principal, denominamos capitalização. Este termo representa a principal diferença entre juros simples e compostos. Vejamos o exemplo abaixo sobre a diferença entre juros simples e compostos.

Exemplo:

Quadro 1– Comparativo juros simples x juros compostos

Mês	Juros Simples		Juros Compostos	
	Rendimento	Montante	Rendimento	Montante
1	R$ 1.000 x 0,3 = R$ 300	R$ 1.300	R$ 1.000 x 0,3 = R$ 300	R$ 1.300
2	R$ 1.000 x 0,3 = R$ 300	R$ 1.600	R$ 1.300 x 0,3 = R$ 390	R$ 1.690
3	R$ 1.000 x 0,3 = R$ 300	R$ 1.900	R$ 1.690 x 0,3 = R$ 507	R$ 2.197
4	R$ 1.000 x 0,3 = R$ 300	R$ 2.200	R$ 2.197 x 0,3 = R$ 659,10	R$ 2856,10

Fonte: Puccini (2011)

Cálculo do juro

Como é do nosso conhecimento, o montante é a soma do principal aos juros da aplicação no prazo determinado e à taxa de juros estipulada. Para obtenção dos juros, temos a seguinte fórmula:

$$J_n = C_0 \, [(1 + i)^n - 1]$$

Exemplo:

Determine o valor dos juros pagos em um empréstimo de R$ 2.000,00 com taxa de juros de 1% a.m. pelo período de cinco meses.

Resolução:

$C_0 = 2.000,00$; $i = 1\%$ a.m.; $n = 5m$

$J_n = C_0 \, [(1 + i)^n - 1] \rightarrow J_n = 2.000,00 \, [(1 + 0,01)^5 - 1]$

$J_n = C_0 \, [(1 + i)^n - 1] \rightarrow J_n = 2.000,00 \, (1,05101) =$ **R$ 102,02** é o valor pago de juros na operação.

Conforme cita Mathias (2004), o valor atual é o valor da aplicação em uma data inferior à data do vencimento. E o valor nominal é o valor do título na data de seu vencimento.

$$VA = \frac{N}{(1+i)^n}$$

VA = valor atual

N = valor nominal

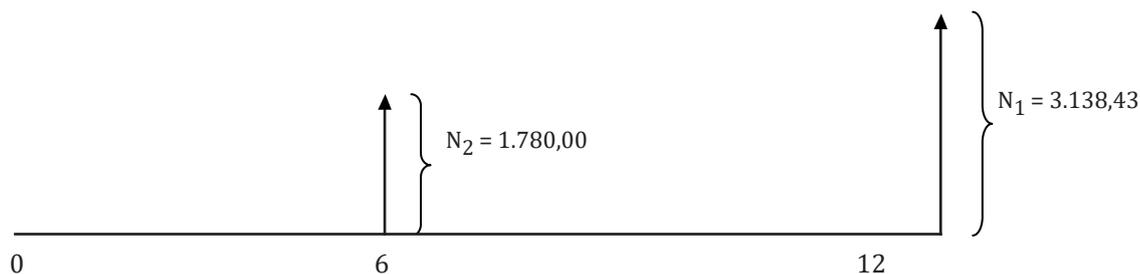
i = taxa de juros

n = número de períodos que antecede o vencimento do título.

Exemplo:

Suponhamos que você possua um título que vencerá daqui a um ano com valor nominal de R$ 3.138,43. Você recebe uma proposta para trocar o título por outro que vence daqui a seis meses no valor de R$ 1.780,00. Assumindo uma taxa de juros praticada pelo mercado de 10% a.m., perguntamos: a troca é vantajosa?

Resolução:

Podemos resolver trazendo os dois valores para a mesma data focal, determinando seus valores atuais. Assumindo a data focal zero, temos:

O valor atual na data focal zero do título com vencimento em 12 meses é dado por:

$$V_1 = \frac{N_1}{(1 + i)^n}$$

$$V_1 = \frac{3.138,43}{(1 + 0,10)^{12}} = \frac{3.138,43}{3,1384} = R\$1.000,00$$

O valor atual na data focal zero do título com vencimento em seis meses é dado por:

$$V2 = \frac{N2}{(1 + i)^n}$$

$$V_2 = \frac{1.780,00}{(1 + 0,10)^6} = \frac{1.780,00}{1,7715} = R\$1.004,80$$

Como o título que vence em seis meses possui um valor atual maior, seria vantajosa a troca.

Taxas equivalentes

Consideram-se duas taxas como equivalentes, se na hipótese de aplicá-las a um mesmo prazo e a um mesmo capital for indiferente aplicar em uma ou em outra.

Sejam as taxas:

i = referente a um intervalo de tempo p;

iq = corresponde a um intervalo de tempo igual a fração própria p/q onde q > p;

Assim a fórmula para cálculo de taxas equivalentes é:

$$i\ quero = (1 + itenho)^{\frac{q}{t}} - 1$$

Onde:

i quero = é a taxa que pretendemos determinar

i tenho = é a taxa que temos determinada.

Exemplo:

Determine a taxa mensal equivalente a uma taxa de 100% a.a.

Resolução:

1 ano tem 12 meses, logo q = 12

$i_q = \sqrt{1}+i-1$

$i_{12} = \sqrt{1}+1 - 1$

i_{12}= 1,0595 - 1 = 0,0595 ou 5,95% a.m.

De outra forma podemos determinar assim a taxa equivalente:

(a) De um período menor para um maior

$$i_{maior} = \left(1 + i_{menor}\right)^{n} - 1$$

Onde n= corresponde ao período considerado, ou seja, o problema tem uma taxa de um período menor, que deve ser transformado em i equivalente de um período maior. Por exemplo: 5% a. m. corresponde a que i trimestral. No primeiro caso abaixo, n=3, pois um trimestre corresponde a três meses.

$$i_{trimestral} = \left(1 + i_{mensal}\right)^{n} - 1$$

$$i_{trimestral} = \left(1 + 0{,}05\right)^{3} = 1{,}05^{3} - 1 = 0{,}157625 = 15{,}76\% \text{ ao trimestre}$$

(b) De um período maior para um menor

$$i_{menor} = \left(1 + i_{maior}\right)^{1/n} - 1$$

Agora faça o inverso. Por exemplo: 15,7625% a. t. corresponde a que i mensal

$$i_{mensal} = \left(1 + i_{trimestral}\right)^{1/n} - 1$$

$$i_{trimestral} = \left(1 + 0{,}157625\right)^{1/3} = 1{,}157625^{1/3} - 1 = 0{,}05 = 5\% ao mês$$

Exemplo:

Suponha que você tem um capital de R$ 1.000,00 e duas taxas de 11,60% a.m. e 39% a.t. aplicados durante três meses. Perguntamos: essas taxas são equivalentes?

Resolução: Para saber se são equivalentes aplicamos o capital de 1.000,00 pelo mesmo prazo, assumiremos três meses, que é o período de aplicação correspondente à taxa i.

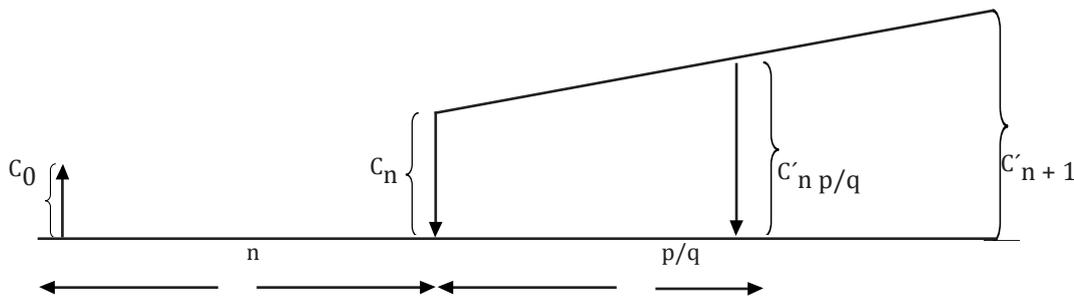
Assim, temos: C_1= 1.000 (1+0,39) = 1.390,00

Para determinar o montante em três meses para a taxa i_q, temos: C_i = 1.000 (1+0,1160)3 = 1.390,00. Como $C_1 = C_i$, concluímos que as taxas 11,60% a.m. e 39% a.t. são equivalentes.

DICA!

Se alguém lhe propõe um empréstimo com taxa de 2% a.m, na verdade você estará pagando 26,82% ao ano. Se ligue!

Períodos não-inteiros

Quando tivermos períodos não-inteiros, devemos adequar a fórmula para obtenção da parcela equivalente a esse período, são as denominadas capitalizações descontinuas. Nestas situações você terá operações com capitalizações anuais e um período fornecido em ano e meses. Deste modo, é necessário determinar a parcela equivalente aos meses. Neste material, utilizaremos a convenção exponencial. A fórmula para encontramos os juros é:

Para determinar este valor, temos dois passos a seguir:

1º) Determinar o montante em juros compostos: $C_n = C_0(1+i)^n$;

2º) Calcular a taxa equivalente. A partir da fração p/q, calcula-se primeiramente a taxa equivalente ao intervalo de tempo 1/q aplicando uma das seguintes fórmulas:

$i_{maior} = (1+i_{menor})^n - 1$

$i_{menor} = (1+i_{maior})^{1/n} - 1$

$iq+1 = q\sqrt{1+i}$

$iq + 1 = (1+i)^{1/q}$

O passo seguinte é capitalizar pelo período em que o montante deve ser aplicado, obtendo:

$[(1+i_q)]^p = [(1+i)^{1/q}]^p$

Chegamos à seguinte fórmula:

$C'n,p/q = Cn\ (1+i)^{p/q}$

Substituindo o valor de C_n

$C'n,p/q = C_0(1+i)^n(1+i)^{p/q}$

Então: $\mathbf{C'n,p/q = C_0(1+i)^{n+p/q}}$

Onde:

p = representa o período fracionado no caso mês, se estivermos trabalhando com anos.

q= representa o período inteiro.

Assim teríamos para um período de 3 anos e 5 meses, o nosso p = 5(meses) e o q = 12(meses).

EXERCÍCIO RESOLVIDO

Suponha um capital de R$ 1.000,00 emprestado a uma taxa de juros de 15% a.a., em um prazo de quatro anos e seis meses. Assumindo uma capitalização anual, determine o montante.

Resolução:

Da parte inteira (quatro anos), basta aplicar a fórmula. Deste modo:

$C_4 = C_0(1+i)^4$

$C_4 = 1.000,00(1+0,15)^4$

$C_4 = 1.000,00(1,749)$

$C_4 = 1.749,00$

Da parte fracionada, faremos a seguinte operação:

P= 6 meses e q = 12 meses, então p/q = 6/12 = 1/2

Logo:

$C'n,p/q = C_4(1+i)^{p/q}$

$C'_{4,1/2} = C_4(1,15)^{1/2} = 1.749,00(1,072)$

$C'_{4,1/2} = 1.875,60$

Voltando à questão, temos:

$C'n,p/q = C_0(1+i)^{n+p/q}$

$C'_{4,1/2} = 1.000,00(1,15)^{4+1/2}$

$C'_{4,1/2} = 1.875,60$

Taxa efetiva

Segundo Lima (1998), é a taxa realmente cobrada no período em que foi fornecida, independentemente do período de capitalização. Então, quando queremos ajustar uma taxa ao período de capitalização, utilizamos a equivalência de capitais. É o processo de formação de juros pelo regime de juros compostos ao longo dos períodos de capitalização. É obtida pela seguinte expressão:

$$\text{Taxa efetiva}\left(if\right)=\left(1+i\right)^{q}-1$$

Onde q representa o número de períodos de capitalização dos juros.

Exemplo:

Suponha uma taxa de juros de 3,8% a.m. Quanto representaria em termos efetivos ao ano.

Resolução:

$\left(if\right)=\left(1+0,038\right)^{12}-1 = 56,44\%$ a.a.

Relação entre taxa efetiva e taxa nominal

Taxa nominal ocorre quando o prazo de formação e incorporação de juros ao capital inicial não coincide com aquele período que se refere à taxa. Para fixar, vamos resolver este exemplo: Se um banco concede empréstimos no valor de R$ 1.000,00, com taxa de 8% a.a., mas adotando a capitalização semestral de juros. Pergunta-se, quanto você pagaria de juros após 1 ano.

Resolução: Como a taxa é anual e a capitalização é mensal, precisamos encontrar a taxa equivalente. Temos, portanto:

$i = 8\%$ a.a. $\quad i' = \frac{i}{k} = \frac{i}{k} = 4\%$ a.s.

Onde o K representa o prazo de formação de juros, ou seja, é o número de vezes em que foi dividido o período correspondente à taxa dada. Assim o montante do primeiro semestre é $C_1 = C_0\,(1+i/k)^1$

$C_1 = 1.000\,(1+0{,}04)^1 = 1.040{,}00$ no primeiro semestre.

Lembre-se que o montante pode ser representado por M ou C.

Já no segundo semestre, temos o valor do primeiro capitalizado novamente:

$C_1 = 1.040\,(1+0{,}04)^1 = 1.081{,}60$

Então, para se determinar a taxa efetiva dividimos os juros pagos no período pelo valor do principal.

$f = \frac{81{,}60}{1.000} = 0{,}0816$ ou $8{,}16\%$ $\quad$ 1.000,00

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Suponha um capital de R$ 100.000,00 aplicado a juros compostos capitalizados mensalmente durante oito meses resulta ao final do período a R$ 148.000,00. Determine a taxa de juros utilizada.

Resposta:

$M = C \times (1 + i)^n$

$148.000{,}00 = 100.000{,}00 \times (1 + i)^8 \rightarrow (1 + i)^8 = \frac{148.000{,}00}{100.000{,}00}$

$(1 + i)^8 = 1{,}48 \rightarrow$ Utilizando a calculadora, temos que $1 + i = 1{,}050226$

$i = 0{,}050226$ ou $i = 5{,}02\%$

2. Determine o valor presente de um montante de R$ 8.400,00 que foi aplicado durante seis meses, com uma taxa de juros contratada de 2% a.m.

Resposta:

$VP = \frac{VF}{(1+i)^n} = \frac{8.400{,}00}{(1+0{,}02)^6} = 7.458{,}96$

3. Após quanto tempo um capital inicial de R$5.000,00 que dobra de valor a cada ano passará a ser maior do que R$ 40.000,00?

Resposta:

M = R$ 40,000,00

C = R$ 5,000,00

Taxa =100%a.a (o capital dobra por ano)

i = 100/100 = 1

$M = C \times (1+i)^t$

$(1+i)^t = M/C$

$(1+1)^t = 40000/5000$

$2^t = 8 \rightarrow 2^t = 2^3$

Eliminando as bases, encontramos t = 3.

Logo, em três anos o montante será de R$ 40.000,00.

4. Um videogame tipo Xbox é vendido à vista por R$ 1.200,00 ou a prazo com entrada de R$ 200,00 mais três parcelas mensais. Qual o valor de cada parcela se a taxa de juros cobrada pela financeira é de 3% a.m.?

Resposta:

$M = C \times (1+i)^t$

$M = 1.000 \times (1+0{,}03)^3$

M = 1.000 x 1,09

M = 1.090,73

Para determinarmos o valor de cada parcela, basta dividirmos 1.090,73/3 = 364,24 o valor de cada parcela.

5. Determinado valor foi aplicado a juros compostos de 12% a.s. durante dois anos. Sabendo-se que rendeu R$ 2.600,00 de juros, qual o montante obtido? Considere $1{,}06^4 = 1{,}26$.

Resposta

$J = [(1 + i)^n - 1]$

$$2.600{,}00 = C\left[\left(1+\frac{0{,}12}{2}\right)^4 - 1\right] \therefore C \approx 10.000$$

M = C + J = 10.000,00 + 2.600,00 = R$ 12.600,00

DICA!

Na maioria das transações do dia-a-dia, os bancos e emprestadores de dinheiro informam a taxa nominal, mas o que nos interessa é a taxa efetiva. Fique ligado!

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Uma calculadora é vendida por R$ 140,00 **à** vista ou em pagamento dividido em dois meses com uma taxa de juros compostos de 5% a.m. Qual o valor a ser pago?

2. Assumindo que você possui um título no valor de R$ 42.000,00 para pagamento daqui a três meses, que deverá ser substituído por outro título com vencimento daqui a cinco meses. Pergunta-se qual o valor a ser pago aceitando uma taxa de juros de 25% a.a. com juros compostos?

3. A rentabilidade efetiva de um investimento é de 10% a.a. Sabendo-se que os juros foram de R$ 27.473,00, o capital era de R$ 83.000,00. Qual o período de aplicação desse capital?

4. Por um equipamento de R$ 360.000,00 paga-se uma entrada de 20% mais dois pagamentos mensais e consecutivos. Considerando o primeiro pagamento de R$ 180.000,00 e a taxa de juros efetiva aplicada de 10% a.m., calcule o valor do segundo pagamento.

5. Um capital de R$ 50.000,00 rendeu R$ 1.000,00 em determinado prazo. Se o prazo fosse superior em dois meses, o rendimento aumentaria em R$ 2.060,40. Calcule a taxa de juros efetiva ao mês, ganha pela aplicação e o prazo em meses.

6. Dois capitais foram aplicados durante dois anos: o primeiro a juros efetivos de 2% a.m. e o segundo, a 1,5% a.m. O primeiro capital é R$ 10.000,00, superior ao segundo e seu rendimento excedeu em R$ 6.700,00 em relação ao rendimento do segundo capital. Calcule o valor de cada capital.

7. Suponha um capital aplicado a juros efetivos de 30% a.a. Depois de três anos, resgatou-se 50% dos juros ganhos, e depois o restante do montante foi aplicado com uma taxa efetiva de 32% a.a., obtendo-se rendimento de R$ 102,30 no prazo de um ano. Determine o valor aplicado inicialmente.

8. Um investidor aplicou R$ 1.000,00 em um fundo que paga 5% a.m., com o objetivo de dispor de R$ 1.102,50 após dois meses. Após 24 dias de aplicação, a taxa efetiva baixou para 4% a.m. Quanto tempo será necessário para obter o capital desejado?

9. Uma quantia de R$ 4.000,00 foi aplicada em dois investimentos diferentes, o primeiro com taxa de 6% a.t. e o segundo a uma taxa de 2% a.m. Sabendo que após oito meses o valor das parcelas se igualam, determine o valor de cada parcela.

10. Determinada quantia foi aplicada em um fundo e duplicou seu valor entre 11 de junho e 22 de novembro do mesmo ano. Determine a que taxa esse fundo foi aplicado.

11. (AFRF 2001) O desconto racional simples de uma nota promissória, 5 meses antes de seu vencimento é de R$ 800,00, a uma taxa de 4% a.m. Calcule o desconto comercial simples correspondente, isto é considerando o mesmo título, a mesma taxa e o mesmo prazo.

    a) R$ 960,00
    b) R$ 666,67
    c)R$ 973,32
    d) R$ 640,00
    e) R$ 800,00

12. (AFRF 2002-1) Um título sofre um desconto comercial de R$ 9.810,00 três meses antes de seu vencimento a uma taxa de desconto simples de 3% a.m. Indique qual seria o desconto à mesma taxa se o desconto fosse simples.

    a) R$ 9.810,00
    b) R$ 9.521,34

c)R$ 9.500,00
d) R$ 9.200,00
e) R$ 9.000,00

13.(AFC / STN 2005) Marcos descontou um título 45 dias antes de seu vencimento e recebeu R$ 370.000,00. A taxa de desconto comercial simples foi de 60% a.a. Assim o valor nominal do título e o valor mais próximo da taxa efetiva de operação são, respectivamente, iguais a:

a) R$ 550.000,00 e 3,4% a.m.
b) R$ 400.000,00 e 5,4% a.m.
c) R$ 450.000,00 e 64,8% a.m.
d) R$ 400.000,00 e 60% a.m.
e) R$ 570.000,00 e 5,4% a.m.

14.(AFRF 2005) Um banco deseja operar a uma taxa efetiva de juros simples de 24% a.t. para operações de 5 meses. Deste modo, o valor mais próximo da taxa de desconto comercial trimestral que o banco deve cobrar em suas operações de 5 meses deverá ser igual à:

a) 19%
b) 18,24%
c) 17,14%
d) 22%
e) 24%

15.(FISCAL FORTALEZA CE 2003) Um título no valor de R$ 20.000,00 sofre um desconto comercial simples de R$ 1.800,00 três meses antes de seu vencimento. Calcule a taxa mensal de desconto aplicada.

a) 6%
b) 5%
c) 4%
d) 3,3%
e) 3%

GABARITO

1. 154,35
2. R$ 43.591,41
3. 3 anos
4. R$ 150.480,00
5. 2% a.m.; 1 **mês**
6. R$ 13.440,52; 3.440,52
7. R$ 199,99
8. 9 dias
9. R$ 2.003,04; R$ 1.9996,96
10. 13,52% a.m.
11. Letra A
12. Letra E
13. Letra B
14. Letra C
15. Letra E

RECOMENDAÇÕES

Antes de seguir ao próximo tópico veja as seguintes questões, se tiver dúvida em responder algum dos conceitos volte ao material e apenas em seguida continue. Se não tiver dúvida siga em frente.

1. Qual a principal diferença entre juros simples e compostos?
2. Você poderia dizer qual a vantagem de cobrar juros compostos para quem empresta?

TÓPICOS ADICIONAIS	ONDE ENCONTRAR / O QUE FAZER
LINKS DA INTERNET	1. www.somatematica.com.br; 2.www.youtube.com/watch?v=X_lvyuMnfvM 3. www.voceeseudinheiro.com
SUGESTÕES DE LEITURA	1.Capítulo 2 do livro Matemática Financeira e suas aplicações de Assaf Neto (2012). 2.Capítulo 3 do livro Matemática Financeira de Washington Franco Mathias e José Maria Gomes. 3. Capítulo 2 do livro Matemática Financeira objetiva e aplicada de Abelardo de L. Puccini (2011)
SUGESTÕES DE EXERCÍCIOS ADICIONAIS	1. Capítulo 2 do livro Matemática Financeira e suas aplicações de Assaf Neto (2012). 2. Capítulo 3 do livro Matemática Financeira de Washington Franco Mathias e José Maria Gomes (2013).

"O amigo deve ser como o dinheiro, cujo valor já conhecemos antes de termos necessidade dele".

(Sócrates)

Equivalência de capitais

Em algum momento do nosso cotidiano pode ser que tenhamos que decidir entre pagar uma dívida da forma como está ou renegociá-la. Você provavelmente já observou, escutou ou leu notícias do tipo "compramos sua dívida" ou ainda "troque sua dívida por outra", mas afinal isso tem algum significado? Se analisarmos o conteúdo informacional dessas notícias a princípio não faria sentido comprar ou trocar uma dívida, então temos que entender o que essas expressões significam. Este tópico do nosso material trata de situações como as citadas anteriormente, pois o termo equivalência de capitais é você comparar dois capitais diferentes que pertençam a datas e taxas de juros diferentes. Isso é possível com os conceitos apresentados na seção. Então leia-os com o devido cuidado para compreender e além disso utilizar tais conceitos na sua pessoal e profissional. Afinal R$ 1.000,00 hoje pode ser a mesma coisa que R$ 1.100,00 daqui a 1 ano, desde que você determine as devidas condições de cada um dos valores.

Banco de Dados/NEaD

Vamos dar continuidade aos nossos estudos, abordando a equivalência de capitais, que possibilita transformar uma forma de pagamento em outra aparentemente diferente, mas veremos que é igual. Também permite avaliar entre duas ou mais alternativas qual é a melhor financeiramente. Esta ferramenta também é utilizada na avaliação de alternativas financeiras distintas, substituição de títulos por outro(s). Mas lembrem-se ainda de que os juros utilizados são compostos.

Conceitos essenciais

Quando trabalhamos com operações financeiras, é comum a antecipação ou o pagamento em atraso dos títulos, ou ainda a troca de título(s) por outros títulos. É nestes casos que precisamos utilizar os conceitos de equivalência de capitais ou capitais equivalentes, para sabermos se estamos lidando com os mesmos valores. Neste sentido, é necessário o entendimento de alguns conceitos considerados essenciais, a saber: (a) Data focal que representa a data a ser considerada como base de comparação de valores referidos a datas diferentes, é conhecida também como data de avaliação ou data de referência. Então quando estamos trabalhando com equivalência de capitais necessita-se de uma data de parâmetro que é a nossa data focal. Já a equação de valor possibilita realizar a igualdade de capitais diferentes, em períodos diferentes, trazidos para uma mesma data focal com taxas de juros fixada. Essa equação é utilizada na igualdade de valores distintos trazidos para uma mesma data focal.

Capitais equivalentes

Consideramos que dois ou mais capitais são equivalentes, quando levados para uma mesma data focal e com mesma taxa de juros, possuem valores iguais.

Exemplo: Suponha que você tem a receber um valor nominal de R$ 20.000,00 com vencimento em dois anos, e possui R$ 25.000,00 hoje para aplicar sob uma taxa de 2% a.m. durante dois anos. Considerando que a taxa de juro o hoje é de 2% a.m., pergunta-se:

- Quanto você possui hoje?
- Quanto você possuirá daqui a um ano?
- Quanto você possuirá daqui a dois anos?

Temos:

X = valor que possui na data zero;

Y = quantia que possuirá após um ano;

Z = quantia que possuirá após dois anos.

Assim, temos:

Hoje: $25.000,00 + 20.000,00/(1 + 0,02)^{24} = 25.000,00 + 12.434,43 =$ **37.434,43**

Daqui a um ano: $25.000,00\ (1,02)^{12} + \frac{20.000,00}{(1+0,02)^{12}} = 31.706,04 + 15.770,38 =$ **47.476,42**

Daqui a dois anos: $25.000,00\ (1,02)^{24} + 20.000,00 = 40.210,93 + 20.000,00 =$ **60.210,93**

Adotando-se uma taxa de juros i, os capitais serão equivalentes na data focal zero, se:

$$VA = \frac{C_1}{(1+i)^1} = \frac{C2}{(1+i)^2} = \frac{C3}{(1+i)^3} = \dots = \frac{Cn}{(1+i)^n}$$

Exemplo:

Admitindo-se uma taxa de juros compostos de 5% a.a., verificar se os capitais são equivalentes na data focal zero.

Solução: $V_1 = \frac{C_1}{(1+i)^1} = \frac{1.050,00}{(1,05)^1} = 1.000,00$

$$V_2 = \frac{C_2}{(1+i)^2} = \frac{1.102,50}{(1,05)^2} = 1.000,00$$

$$V_3 = \frac{C_3}{(1+i)^3} = \frac{1.157,62}{(1,05)^3} = 1.000,00$$

$$V_4 = \frac{C_4}{(1+i)^4} = \frac{1.215,51}{(1,05)^4} = 1.000,00$$

$$V_5 = \frac{C_5}{(1+i)^5} = \frac{1.276,28}{(1,05)^5} = 1.000,00$$

Deste modo, podemos concluir que: $V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = V_5$

Pelos cálculos acima, podemos afirmar que os capitais são equivalentes. Então, é normal possuir qualquer um dos valores acima nas respectivas datas de vencimento. Desta forma, é comum você possuir 1.276,28 em cinco anos ou 1.000,00 hoje. Esta é a lógica da equivalência de capitais, que permite comparar valores diferentes tendo como parâmetro uma data focal zero.

Valor atual de um conjunto de capitais

Suponha que um indivíduo possui uma carteira de aplicações (ou valores a receber) com vencimentos distintos. Como podemos saber quanto ele teria hoje caso recebesse os valores? Para descobrir este valor, é necessário fixar uma taxa de juros i, além de uma data focal (hoje) como data zero a fim de poder comparar os valores.

$$V = \frac{C1}{(1+i)^1} + \frac{C2}{(1+i)^2} + \frac{C3}{(1+i)^3} + \dots + \frac{Cn}{(1+i)^n}$$

De tal modo, que, o total que obtemos deve ser o valor atual do conjunto de capitais na data zero, ou seja, é o valor total que teríamos hoje. Em outras palavras: dado um custo de oportunidade e uma data de comparação podemos dizer que o valor atual "mede" o valor da carteira.

Exemplo:

Suponha que você tem três valores a receber oriundos de venda a prazo. Quanto você teria se recebesse hoje (data focal zero), admitindo uma taxa de juros de 2% a.m.?

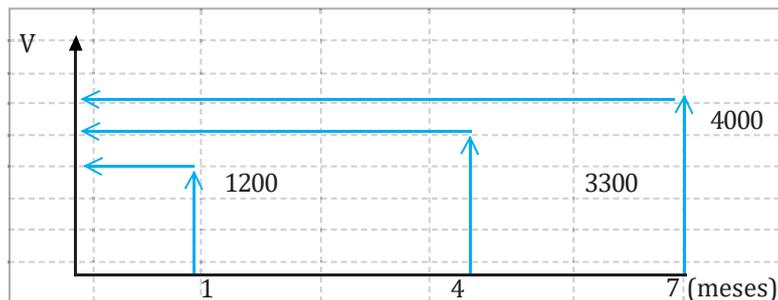
CAPITAL (R$)	VENCIMENTO (MÊS)
1.200	1
3.300	4
4.000	7

Solução:

Para resolver, trazemos os valores a data focal zero

$$V=\frac{1.200,00}{(1,02)^{1}}=\frac{3.300,00}{(1,02)^{4}}+\frac{4.000,00}{(1,02)^{7}}$$

V=1.176,47+3.048,69+3.482,24=7.707,40

Então, se você recebesse hoje teria R$ 7.707,40. Podemos representar graficamente da seguinte forma:

Conjunto equivalente de capitais

Suponha que você e um amigo têm duas quantias a receber em datas e valores também distintos. Como sabermos quem teria mais dinheiro hoje? Esta pergunta é respondida pelo conceito de equivalência de capitais. Então, dados a taxa de juros i e dois conjuntos de valores nominais com seus respectivos prazos, contados a partir da mesma data:

1º Conjunto		2º Conjunto	
Capital	Data de vencimento	Capital	Data de vencimento
C_1	m_1	C'_1	m'_1
C_2	m_2	C'_2	m'_2
...	...	...	...
C_n	m_n	C'_n	m'_n

De posse dos dados acima, dizemos que dois capitais são equivalentes se fixadas uma data focal e uma taxa de juros os valores dos dois conjuntos sejam iguais. Assim, na data zero e taxa i, os conjuntos serão equivalentes se:

$$\frac{C_1}{(1+i)^{m_1}} + \frac{C_2}{(1+i)^{m_2}} + \frac{C_3}{(1+i)^{m_3}} + \ldots + \frac{C_n}{(1+i)^{m_n}} = \frac{C'_1}{(1+i)^{m'_1}} + \frac{C'_2}{(1+i)^{m'_2}} + \frac{C'_3}{(1+i)^{m'_3}} + \ldots + \frac{C'_n}{(1+i)^{m'_n}}$$

Exemplo:

Suponha que você tem dois valores distintos a receber oriundos de vendas a prazo. Queremos saber se os valores são equivalentes. Como devemos proceder? Assuma uma data focal zero e uma taxa de juros de 10% a.a.

1º Conjunto		2º Conjunto	
Capital	**Data de vencimento**	**Capital**	**Data de vencimento**
2.000,00	1º Ano	3.558,50	1º Ano
850,00	2º Ano	424,90	2º Ano
1.500,00	3º Ano	500,00	3º Ano
690,00	4º Ano	230,00	4º Ano

Solução: No exercício acima, a comparação apenas poderá ser efetuada se tivermos a mesma data focal:

O conjunto 1 tem o seguinte valor:

$$V1=\frac{2.000,00}{(1,1)^1}+\frac{850,00}{(1,1)^2}+\frac{1.500,00}{(1,1)^3}+\frac{69000}{(1,1)^4}$$

V1=1.818,18+702,48+1.126,97+471,28

V1 = 4.118,91

O conjunto 2 tem o seguinte valor:

$$V2=\frac{3.558,50}{(1,1)^1}+\frac{424,90}{(1,1)^1}+\frac{500,00}{(1,1)^1}+\frac{230,00}{(1,1)^1}$$

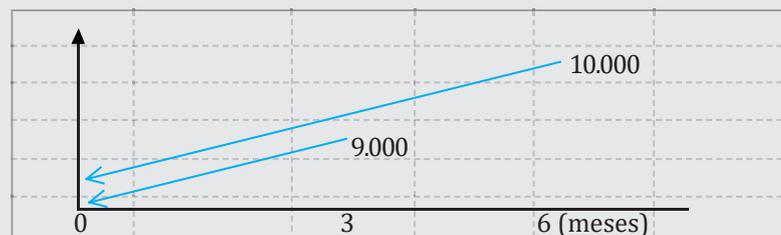
V2=3.235,00+351,16+375,66+157,09

V_2 = 4.118,91

Com base nos cálculos, observamos que $V_1 = V_2$. Concluímos, portanto, que com taxa de 10% a.a. os dois conjuntos de capitais são equivalentes, ou seja, tanto faz você possuir um ou outro conjunto, pois no final representam o mesmo valor.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

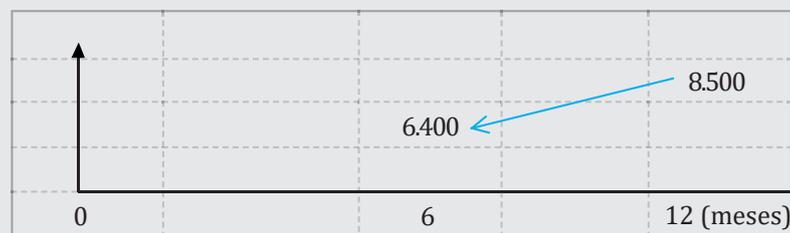
1. Suponha a seguinte proposta feita por um "amigo seu": você tem uma quantia a receber no valor de R$ 10.000,00, com vencimento em seis meses e seu amigo propõe a troca por um cheque no valor de R$ XXX que vence em três meses. Sabendo-se que a taxa de juros praticada pelo mercado é de 3,00% a.m., pergunta-se: a troca foi vantajosa?

Resolução: Para sabermos se são equivalentes, trazemos os dois capitais à mesma data focal zero. Se após essa operação os valores forem idênticos, dizemos que são equivalentes, e se os valores forem diferentes, não são equivalentes. Veja pela figura que levamos os dois valores à mesma data focal. Assim, temos:

$$V_3 = \frac{9.000,00}{(1+0,03)^3} = 8.236,25$$

$$V_6 = \frac{10.000,00}{(1+0,03)^6} = 8.374,84$$

Como podemos observar, $V_3 < V_6$. Portanto, a troca proposta não vale a pena.

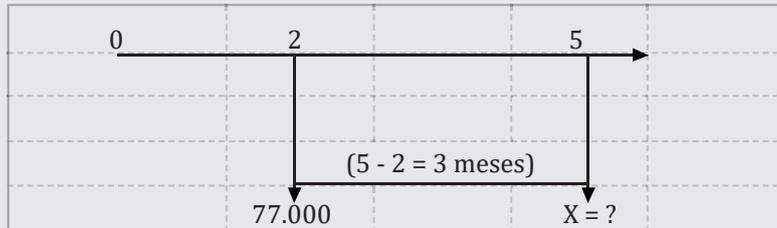
2. Suponha que nosso amigo "Chico Seguro" irá receber daqui a um ano R$ 8.500,00 referente à venda de um veículo. Mas, como de costume, queria o dinheiro antes. Então, sugeriu a "Zé Amarrado" a troca desse direito por uma nota promissória no valor de R$ 6.400,00. Sabendo-se que a taxa de juros praticada pelo mercado é de 5,00% a.m., pergunta-se: essa troca foi vantajosa para "Chico Seguro"?

Resolução: Para sabermos se são equivalentes, trazemos os dois capitais à mesma data focal. Desta vez, vamos agir diferentemente: ao invés de levar para a data focal zero, vamos levar o valor com a data mais distante (Um ano) para a data mais próxima. Após essa operação, comparamos os dois valores. Veja pela figura que levamos o valor Um (R$ 8.500,00) para data do valor Dois (R$ 6.400,00). Assim, temos:

$$V_{12} = \frac{8.500,00}{(1+0,05)^6} = 6.342,84$$

$$V_6 = 6.400,00$$

Como podemos notar $V_{12} < V_6$, ou seja, na data focal seis os valores são distintos e o valor de 8.500,00 trazido à data focal seis é inferior ao valor sugerido. Portanto, a troca proposta vale a pena.

3. Os empresários costumam substituir dívidas por outras dívidas. Suponha que um desses empresários possui um título no valor de R$ 77.000,00, com vencimento daqui a dois meses e resolve trocá-lo por outro título que vence em cinco meses. Sabendo-se que o banco adota uma taxa de juros de 9% a.m., pergunta-se: qual o valor do novo título?

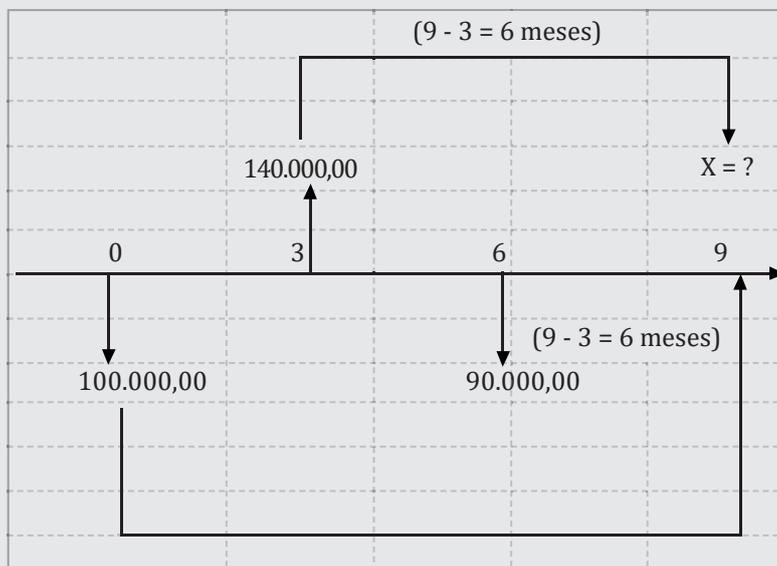
Resolução: Para saber o valor do novo título, levamos o título Um (77.000,00) para a data focal cinco, ou seja, para cinco meses. Vejamos pela figura como ficará o título Um. Desta forma, temos:

Como tratamos de equivalência de capitais, o valor a ser encontrado representa o valor do título na data focal determinada. Calculando:

$$VF = VP(1+i)^n$$

$$VF = 77.000,00(1+0,09)^3$$

$$VF = 77.000,00\ (1,295929)$$

$$VF = R\$\ 99.717,23$$

4. Ainda acerca da troca de dívidas, veja a seguinte situação: um empresário possui dois títulos com valores de R$ 100.000,00 com vencimento para hoje e R$ 90.000,00 com vencimento em seis meses. O empresário propõe ao banco a substituição da dívida por um pagamento de R$ 140.000,00 em três meses e o saldo devedor para pagamento em nove meses. Sabendo que a taxa de juros cobrada foi de 10% a.m., determine o saldo devedor a ser pago.

$VF1 = VP(1+i)^n$

$VF1 = 100.000,00\ (1+0,10)^9$

VF1 = 100.000,00 (2,357948)

VF1 = R$ 235.794,80

$VF2 = VP\ (1+i)^n$

$VF2 = 90.000,00\ (1+0,10)^3$

VF2 = 90.000,00 (1,331)

VF2 = R$ 119.790,00

$VF3 = VP\ (1+i)^n$

$VF3 = 140.000,00\ (1+0,10)^6$

VF3 = 140.000,00 (1,771561)

VF3 = R$ 248.018,54

Deste modo, o valor que queremos determinar pode ser obtido da seguinte forma:

X + VF3 = VF1 + VF2

X + 248.018,54 = 235.794,80 + 119.790,00

X = -248.018,54 + 35.794,80 + 119.790,00

X = 92.433,74

Logo, o valor que deverá ser pago na data focal nove é de R$ 92.433,74.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Uma loja de veículos apresenta duas opções de compras para seus clientes. Pergunta-se qual a melhor alternativa entre as opções abaixo.

a) R$ 30.000,00 de entrada mais duas parcelas semestrais, sendo a primeira de R$ 50.000,00 e a segunda de R$ 100.000,00;

b) Pagamento efetuado em quatro parcelas trimestrais, sendo de R$ 40.000,00 as duas primeiras parcelas e de R$ 50.000,00 as duas restantes.

2. Uma loja de roupas oferece um suéter por R$ 1.800,00, podendo este valor ser pago em três parcelas mensais e iguais, com a primeira parcela no ato da compra (entrada). Se um cliente propôs que o valor da terceira parcela fosse de R$ 1.000,00, qual seria o valor das outras duas parcelas, desde que fossem iguais, dada uma taxa de juros de 8% a.m.?

3. Suponha um apartamento colocado à venda por parcelas semestrais de R$ 50.000,00, com o vencimento da primeira parcela daqui a seis meses. Se alguém propuser a aquisição do bem em duas parcelas, uma hoje e a segunda daqui a um ano. Pergunta-se qual o valor das parcelas, dada uma taxa de juros de 20% a.s.?

4. Supondo que você tem certa quantia de dinheiro que pode ser aplicado a uma taxa de 3,5% a.m. no mercado financeiro. Se você, ao invés de aplicar o dinheiro, emprestá-lo a um parente, quanto ele deverá devolver após um ano para que você não perca dinheiro?

5. Ricardo tem duas dívidas que pretende transformar em uma apenas, com a primeira no valor de R$ 150.000,00 em 12 meses e a segunda no valor de R$ 300.000,00 em 24 meses. Qual será o valor da parcela para transformá-las em quatro parcelas semestrais e iguais, vencendo a primeiro daqui a seis meses? Dada uma taxa de juros de 25% a.a.

6. Um tablet é vendido por R$ 600,00 à vista ou em três parcelas mensais de R$ 200,00 mais uma entrada. Dada uma taxa de juros de 7% a.m., pergunta-se qual o valor da entrada?

7. Voltando ao item anterior, este valor de entrada é considerado o quê?

8. Um investidor aplicou R$ 100.000,00 a uma taxa de 25% a.a. para resgatar em seis meses, mas resolveu resgatar antes (três meses) para realizar outros investimentos e resgatou parte dos recursos (R$ 30.000,00). Pergunta-se: quanto ele terá para resgatar nos seis meses?

9. Determine o valor de X que torna os conjuntos de capitais equivalentes na data focal seis, considerando uma taxa de juros de 18% no período.

10. Um vendedor oferece três possibilidades de compra de uma mesa cujo preço anunciado é de R$ 800,00. Qual a melhor alternativa?

a) À vista com 5% de desconto;

b) Em duas parcelas sem juros no valor de R$ 400,00;

c) Em quatro parcelas sem entrada no valor de R$ 210,00.

GABARITO

1. Resposta: Alternativa A

2. Resposta: 421,94

3. Resposta: RS 76.388,89

4. Resposta: R$ 18.132,82

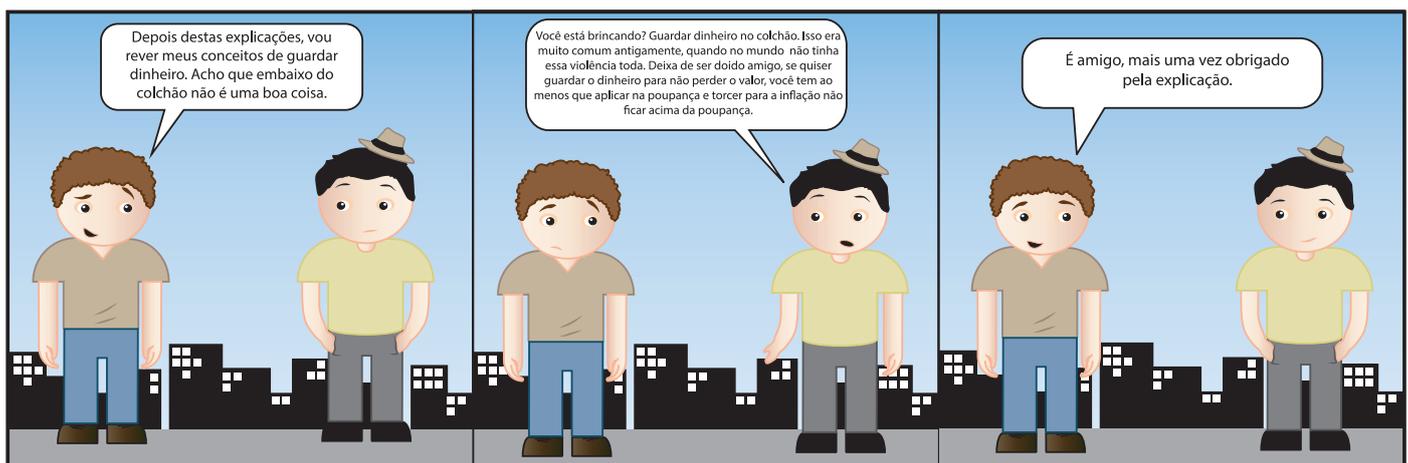
5. Resposta: R$ 102.296,12

6. Resposta: 75,14

7. Resposta: juros

8. Resposta: R$ 80.082,26

9. Resposta: R$ 1.224.43

10. Resposta: alternativa A

CURIOSIDADE:

Nos primeiros tempos da civilização, ninguém precisava de dinheiro. Os problemas começaram a surgir quando os homens passaram a viver em sociedade. Valia tudo: sal, tijolos, dentes de cachorro ou pedaços de bambu.

Há dois mil anos, na Lídia, um pequeno país da Ásia Menor, iniciou-se a cunhagem da moeda, em ouro, prata, cobre, bronze e outros metais. Outros países copiaram e aperfeiçoaram o sistema. Grécia e Roma colocaram símbolos nacionais nas moedas. A primeira moeda de prata de valor e peso definidos surgiu no século VII A.C. na ilha grega de Egina.

RECOMENDAÇÕES

Antes de seguir ao próximo tópico veja as seguintes questões, se tiver dúvida em responder algum dos conceitos volte ao material e apenas em seguida continue. Se não tiver dúvida siga em frente.

1. Você sabe definir fluxo de capitais?
2. Você sabe quando dois capitais são equivalentes?
3. O que é trocar uma dívida?

TÓPICOS ADICIONAIS	ONDE ENCONTRAR / O QUE FAZER
LINKS DA INTERNET	1. www.somatematica.com.br; 2.www.bcb.gov.br; 3. www.voceeseudinheiro.com.br
SUGESTÕES DE LEITURA	1.Capítulo 4 do livro Matemática Financeira de Washington Franco Mathias e José Maria Gomes (2013).
SUGESTÕES DE EXERCÍCIOS ADICIONAIS	1. Capítulo 4 do livro Matemática Financeira de Washington Franco Mathias e José Maria Gomes (2013).

II

RENDAS CERTAS OU ANUIDADES

Nesta unidade, vamos estudar um pouco sobre rendas certas ou anuidades, que serão utilizados durante o decorrer do curso e servem de base para toda operação relacionada à Matemática Financeira.

Não sei se você percebeu, mas sempre falamos em pagamentos ou recebimentos, principalmente agora que já conhecemos o conceito de equivalência de capitais. Na maioria das operações financeiras, temos uma sucessão de fatos (pagamentos ou recebimentos) que influenciam diretamente o resultado das nossas operações.

Esta sequência também é conhecida como fluxo de capitais, que podem ser: aluguéis, salários, financiamentos, empréstimos, dentre outros. Para entendermos melhor estas movimentações, recorreremos ao conceito de fluxo de caixa, que pode ser entrada ou saída de recursos.

Finalmente, o aspecto mais relevante desta unidade é a compreensão de que quando estamos constituindo um capital em uma data futura, temos uma capitalização, já quando queremos quitar uma dívida temos uma amortização.

Objetivos:

- Apresentar os principais conceitos inerentes ao tema;
- Aplicar noções de anuidade;
- Entender como se forma um fluxo de caixa.

Rendas certas ou anuidades

Banco de Dados/NEaD

Se em algum momento da sua vida você realizou uma compra parcelada ou guardou dinheiro em poupança, você está diante de uma anuidade ou renda certa. Quando nosso objetivo é constituir um capital em uma data futura temos um processo de capitalização. Se por outro lado nosso objetivo é pagar uma dívida temos um processo de amortização. Veja que a discussão gira em torno de entradas e saídas de recursos de forma sucessiva que é a característica principal desse assunto, o processo de repetição de um pagamento ou recebimento. Veremos adiante os principais tópicos do tema e suas aplicações.

"Não estimes o dinheiro nem em mais nem em menos do que aquilo que vale, porque ele é um bom servo e um mau amo" (Alexandre Dumas)

O tópico a ser abordado agora tratará das rendas certas ou anuidades, que representam uma importante aplicação da Matemática Financeira e que percebemos facilmente no nosso cotidiano, desde o pagamento dos aluguéis até as compras parceladas.

Voltando um pouco nos conceitos, vejamos o seguinte diálogo:

"Chico Seguro" e "Zé Amarrado", em mais uma daquelas conversas sobre dinheiro, estavam com o seguinte discurso – Chico Seguro diz que vai comprar um carro a prazo e Zé Amarrado ressalta o seguinte: você sabia, Chico, que quando nós compramos a prazo no valor da parcela tem um pedacinho de juros, além do valor que a gente deve? Chico sabiamente diz que sim. – Mas nós sabemos o que representa este valor a mais que faz parte da parcela?

Logo, no valor da prestação que você está pagando existe uma parte do pagamento referente ao dinheiro tomado emprestado e outra parte referente aos juros. O processo de pagamento da dívida denomina-se amortização e o valor de cada parcela é denominada termo de uma anuidade ou prestação.

Definições

Suponha uma série de capitais com suas respectivas datas e que se referem a uma data focal:

Capitais	Datas
R_1	n_1
R_2	n_2
R_3	n_3
....	....
R_n	n_n

Os termos R_1, R_2, R_3 ... R_n são os termos (prestações).

Os n_1,n_2,n_3, ...nn são as datas de vencimento dos respectivos termos.

Classificação das anuidades

CLASSIFICAÇÃO DAS ANUIDADES	
Quanto ao prazo	Temporárias - quando a duração for limitada
	Constantes - quando a duração for ilimitada
Quanto ao valor dos termos	Constante - quando todos os termos são iguais
	Variável - quando os termos são diferentes entre si
Quanto à forma de pagamento ou de recebimento	Imediatas - os termos são exigidos a partir do primeiro período a)Postecipadas ou vencidas - se os termos são exigidos no fim do período b) Antecipadas - se os termos são exigidos no início dos períodos.
	Diferidas - os termos são exigidos a partir de uma data que não seja o primeiro período. a)Postecipadas ou vencidas - se os termos são exigidos no fim do período b) Antecipadas - se os termos são exigidos no início dos períodos.
Quanto à periodicidade	Periódicas - tem períodos iguais
	Não periódicas - períodos diferentes entre si

Modelo básico de anuidade (adotaremos este modelo em nosso curso)

Na composição deste modelo, as anuidades devem ser simultaneamente:

- Temporárias;
- Constantes;
- Imediatas e postecipadas;
- Periódicas;
- A taxa de juros "i" está referida ao mesmo período.

Para melhor compreender o modelo vejamos um exemplo.

Exemplo:

Suponha que você adquiriu um aparelho LCD em quatro parcelas mensais de R$ 350,00 sem entrada. A primeira parcela será paga no mês seguinte, e na operação consta uma taxa de juros de 2% a.m. Qual seria o valor pago à vista?

Resolução: Para solucionar o primeiro passo, trazemos os valores para a data focal zero. O somatório dos valores atuais é dado por:

$$P=\frac{R1}{(1+i)^{n}}+\frac{R2}{(1+i)^{n+1}}+\frac{R3}{(1+i)^{n+2}}+\frac{R4}{(1+i)^{n+3}}$$

$$P=\frac{350,00}{(1+0,02)^{1}}+\frac{350,00}{(1+0,02)^{2}}+\frac{350,00}{(1+0,02)^{3}}+\frac{R350,00}{(1+i)^{4}}$$

P = 343,14 + 336,41 + 329,82 + 323,34

P = 1.332,71

Porém colocando: R1 = R2 = R3 = R4 = R

$$\text{Temos que } P=\frac{R}{(1+i)^{n}}+\frac{R}{(1+i)^{n}}+\frac{R}{(1+i)^{n}}+\frac{R}{(1+i)^{n}}$$

$$P= R\left[\frac{1}{(1+0,02)^{1}}+\frac{1}{(1+0,02)^{2}}+\frac{1}{(1+0,02)^{3}}+\frac{1}{(1+0,02)^{4}}\right]$$

P = R [0,980392 + 0,961169 + 0,942322 + 0,923845]

P = R [3,807728]

Como nosso R = 350,00

Temos que:

P = 350,00 [3,807728]

P = 1.332,71

Assim, percebemos que o valor do LCD à vista é R$ 1.332,71. Outro detalhe relevante é que a diferença entre o valor do LCD a prazo e o valor à vista representa os juros pagos na operação.

Valor atual do modelo básico

Afinal, o que seria o valor atual do modelo básico? Este é o modelo correntemente utilizado pelas instituições financeiras. É aquele que você financia e paga a primeira parcela depois de trinta dias ou mais. Veja a seguinte situação: você financiou um veículo em doze parcelas e depois de pagar seis, resolveu quitar a dívida. Qual seria o valor a pagar, já que as parcelas restantes ainda não venceram? Lembre-se de que deste valor devem ser descontados os juros, pois você está pagando antes do vencimento.

Esta situação deve-se ao fato de que ao pagar antes do vencimento você está quitando uma dívida que não venceu. Logo, devem ser descontados os juros que você deveria pagar se efetuasse o pagamento apenas na data do vencimento.

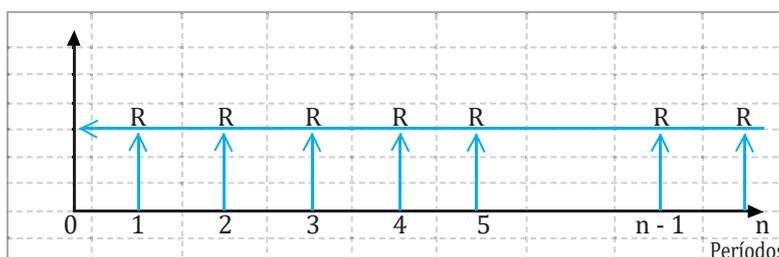
Vejamos o exemplo abaixo, onde a primeira coluna indica o valor do vencimento; a segunda, o tempo de vencimento; e a terceira, o valor a ser pago na data focal zero (hoje).

Valor do vencimento	Vencimento	Valor hoje
720,00	6 meses	639,33
720,00	5 meses	652,12
720,00	4 meses	665,16
720,00	3 meses	678,47
720,00	2 meses	692,04
720,00	1 mês	705,88

Os valores no vencimento são iguais, contudo, na data focal zero (hoje) são diferentes, o que se deve ao fato de que as prestações que vencem mais tarde têm descontos maiores. O somatório dos valores na data focal zero é chamado de valor atual, que representa o valor que você pagaria se fosse quitar o empréstimo. Para reforçar o conceito, vejamos como é realizado o cálculo do valor de uma parcela na data focal zero, supondo uma taxa de 2% a.m.

$$P=\frac{720,00}{(1,02)^6}=639,33$$

Então, tanto faz pagar R$ 720,00 daqui a seis meses como pagar R$ 639,33 hoje, com taxa de juros de 2% a.m.

Graficamente, temos a seguinte situação:

O somatório do valor atual dos termos na data zero é dado por:

$$P= \frac{R1}{(1+i)^1}+\frac{R2}{(1+i)^2}+\frac{R3}{(1+i)^3}+...+\frac{R4}{(1+i)^n}$$

A fórmula é dada por:

P = R x a n i, lê-se " a cantoneira i" ou simplesmente "a, n, i".

P = valor principal (valor atual ou à vista);

n = número de termos (prestações);

R = termos (prestações);

i = taxa de juros.

o fator a n i é dado por:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i\,(1 + i)^n}$$

Exemplo:

Suponha a aquisição de um veículo em quatro parcelas mensais de R$ 2.626,24 sem entrada. Com a primeira parcela a partir do mês seguinte, pergunta-se: qual o valor do veículo à vista?

Resolução

n = 4

i = 2%

R = 2.626,24

P= ?

Calculando o valor do fator a n i

$$a\ n|i = \frac{(1+0,02)^n - 1}{0,02(1,02)^4}$$

$$a\ 4|2 = \frac{(1,02)^4 - 1}{0,02\ (1,02)4}$$

$$a\ 4|2 = \frac{1,082432 - 1}{0,02\ (1,082432)}$$

$$a\ 4|2 = \frac{0,082432}{0,0216486}$$

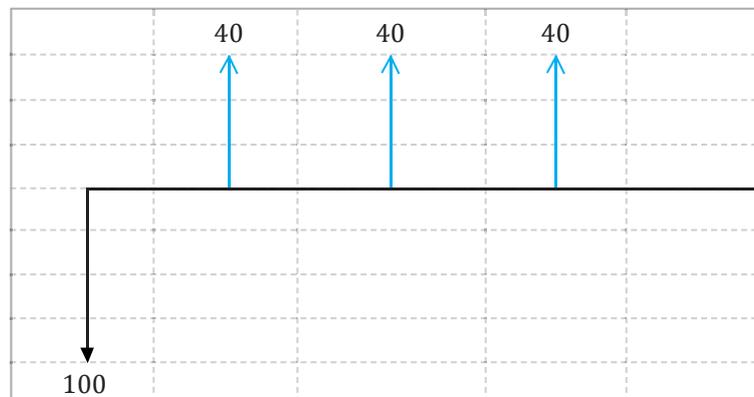
$$a\ 4|2 = 3,807721$$

Desta forma, temos:

P = 2.626,24 x 3,807721 = R$ 10.000,00, ou seja, é o valor do veículo à vista.

Podemos analisar também sob outra perspectiva:

a) Fluxo de caixa constante, série uniforme ou fluxo homogêneo:

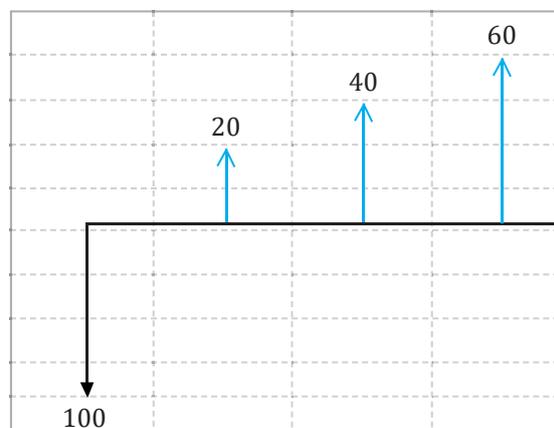
Suponha um fluxo de caixa que representa um empréstimo de R$ 100,00 em três parcelas de R$ 40,00.

Na ótica do emprestador, são representados:

- Três períodos de tempo (três meses);
- Um fluxo de saídas de recursos no valor de R$ 100,00;
- Três fluxos de entradas no valor de R$ 40,00.

Na ótica do tomador do empréstimo, o fluxo representa:

- Três períodos de tempo (três meses);
- Um fluxo de entrada de recursos no valor de R$ 100,00;
- Três fluxos de saídas no valor de R$ 40,00.

b) Fluxo de caixa variável ou fluxo homogêneo

Suponha um fluxo de caixa que representa um empréstimo de R$ 100,00 em três parcelas mensais, sendo a primeira de R$ 20,00, a segunda de R$ 60,00 e a terceira de R$ 40,00.

Na ótica do emprestador, são representados neste fluxo:

- Três períodos de tempo (três meses);
- Um fluxo de saídas de recursos no valor de R$ 100,00;

• Três fluxos de entradas no valor de R$ 20,00, R$ 40,00 e R$ 60,00.

Na ótica do tomador do empréstimo, o fluxo representa:

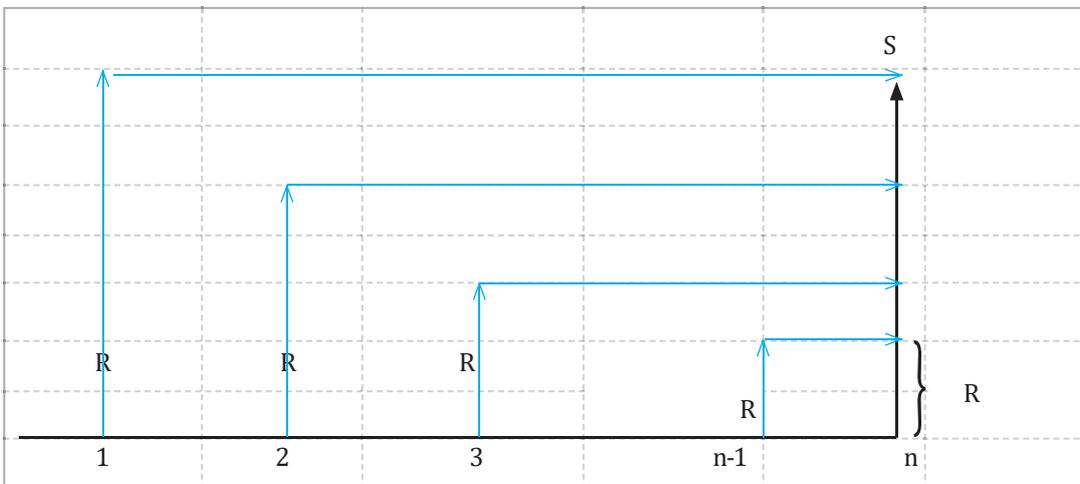
• Três períodos de tempo (três meses);

• Um fluxo de entrada de recursos no valor de R$ 100,00;

• Três fluxos de saídas no valor de R$ 20,00, R$ 40,00 e R$ 60,00.

O valor da seta de R$ 100,00 pode representar entrada ou saída de recursos, dependendo da ótica de visão (emprestador e tomador de empréstimo). Logo, não existe convenção estabelecida em relação ao sentido das setas representativas dos fluxos, mas devemos observar os sentidos dos fluxos, que devem ser opostos à linha do tempo quanto à entrada e saída.

Montante do modelo básico

Em um processo de capitalização onde se aplica parcelas iguais e sucessivas tais como uma aplicação financeira de mesmo valor (R), periódicas e postecipadas, a uma determinada taxa de juros i. Temos como problema determinar o montante denominado de "S" na data focal "n", resultante desse processo de capitalização. Podemos representar graficamente da seguinte forma:

Define-se o montante como o somatório dos montantes de cada parcela R na data focal n. Ou seja, levamos todos os valores a uma data futura (data focal) e a soma de todos representa nosso "S".

$S = R\, s_{n\neg i}$ ou ainda,

$$R = \frac{S}{s_{n\neg i}} \quad (1)$$

Exemplo:

Suponha a aquisição de um veículo à vista por R$ 50.000,00 daqui a 12 meses. Admitindo-se que a pessoa irá poupar uma determinada quantia mensal que será aplicada em títulos de renda fixa rendendo 2,2% a.m. de juros compostos. Determine quanto é necessário poupar mensalmente para conseguir compara o veículo.

Resolução:

S = 40.000,00

n = 12 meses

i = 2,2% a.m.

$$s\ 12\neg\ 2{,}2 = \frac{(1{,}022)^{12} - 1}{0{,}022} = \frac{1{,}298407 - 1}{0{,}022} = \frac{0{,}298407}{0{,}022} = 13{,}563955$$

$$R = \frac{S}{s\ n\neg\ i} \quad (*)$$

(*) para maiores detalhes ver Mathias e Gomes (2013) pag. 196-197.

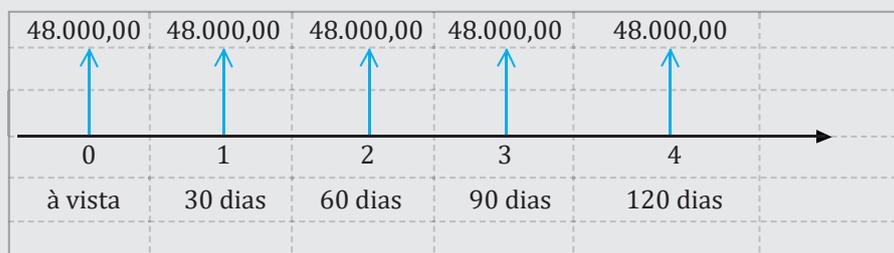
$$R = \frac{50.000{,}00}{s\ n\neg\ i\ 13{,}563955} = 3.684{,}72$$

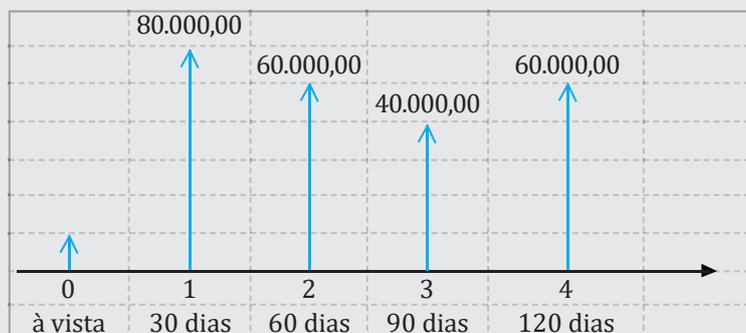
Esse tipo de operação é muito útil nos dias atuais, especialmente quando queremos fazer uma poupança para adquirir um bem qualquer, podemos utilizar essa operação de montante do modelo básico.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1º) Uma imobiliária divulgou em seu site a seguinte informação: "venda de um imóvel pelo valor de R$ 240.000,00". Conforme os tipos de pagamentos citados acima, vamos elaborar um fluxo de caixa e identificar se ele corresponde ao modelo homogêneo ou heterogêneo de diagrama?

Resolução:

No modelo1, com cinco parcelas mensais, sucessivas e iguais, temos:

Observando o fluxo acima, verificamos o pagamento de mesmo valor (R$ 48.000,00), distribuídos em 120 dias. Trata-se, portanto, de um fluxo de caixa homogêneo. Como o primeiro pagamento ocorreu no primeiro mês, dizemos que foi antecipado.

Modelo 2, com quatro parcelas mensais e iguais, sendo a primeira de R$ 80.000,00, a segunda de R$ 60.000,00, a terceira de R$ 40.000,00 e a última de R$ 60.000,00, sem entrada.

Observando o fluxo acima, verificamos pagamentos de valores distintos (R$ 80.000,00, R$ 60.000,00, R$ 40.000,00 e 60.000,00), distribuídos em 120 dias. Trata-se, portanto, de um fluxo de caixa heterogêneo. Como o primeiro pagamento ocorre apenas no fim do primeiro período, é classificada assim como uma série postecipada.

2º) Um aparelho de LCD custa R$ 5.000,00 à vista; porém, pode ser parcelado em dez vezes mensais sem entrada. Considerando uma taxa de 3% a.m., qual o valor das prestações a serem pagas?

Resolução:

$$R=\frac{P}{a\ n|i}$$

Onde:

P = 5.000,00

n = 10m

i = 3% a.m.

Calculando-se a n i, temos:

$$a\ 4|2=\frac{(1{,}03)^4-1}{0{,}03(1{,}03)^4}$$

$$a\ 4|2=\frac{1{,}343916-1}{0{,}03(1{,}343916)}$$

$$a\ 4|2 = 586{,}14$$

$$R=\frac{5.000{,}00}{8{,}530297}=586{,}14$$

Portanto, o comprador deverá pagar dez parcelas mensais no valor de R$ 586,14.

3º) Uma motocicleta é vendida por R$ 20.000,00 à vista ou em doze parcelas mensais de R$ 1.949,74. Qual a taxa de juros cobrada na operação?

Resolução:

P = R a n|i

Assim, temos: 20.000,00 = 1.949,74 a 12| i

$$a\ 12|\ i = \frac{20.000{,}00}{1.974{,}74} = 10{,}257778$$

$$\text{Como } a\ 12|\ i = \frac{(1+i)^{12}-1}{i(1+i)^{12}}$$

O problema é encontrar a taxa de juros i que satisfaça a desigualdade

$$\frac{(1+i)^{12}-1}{i(1+i)^{12}}=10{,}257778$$

Como não conseguimos determinar de forma direta, vamos determinar por tentativa e erro ou por meio de tabelas disponibilizadas. Uma aproximação interessante seria por meio da seguinte fórmula:

$$i0=\frac{1}{an|i}-\frac{an|i}{n^2}$$

$$i0=\frac{1}{10,257778}-\frac{10,257778}{144}$$

i0=0,0974869-0,0712345

i0=2,625% a.m.

A taxa que foi calculada é uma aproximação. O auxílio de uma calculadora financeira facilita bastante este tipo de cálculo.

DICA!

As lojas muitas vezes utilizam-se do artifício de dividir em suaves parcelas para o consumidor não prestar atenção no valor total que será pago. Fique ligado!

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Suponha um empréstimo no valor de R$ 60.000,00 que deve ser pago em um prazo de dez meses, em dez parcelas mensais e iguais, com taxa de 2% a.m. Determine o valor das parcelas.

2. Um financiamento no valor de R$ 80.000,00 é concedido para ser amortizado em oito pagamentos mensais e iguais. A taxa de juros contratada é de 1% a.m. Com base nestas informações, determine o valor da parcela.

3. Dado um financiamento no valor de R$ 120.000,00 concedido para ser amortizado em dez anos com parcelas mensais e iguais, com uma taxa de juros de 1% a.m. Com estas informações, determine o valor de cada parcela mensal.

4. Uma loja de eletrodomésticos faz a seguinte propaganda: um aparelho de LCD em 15 parcelas mensais de R$ 125,40. Considerando uma taxa de juros de 5% a.m., qual o valor à vista do aparelho?

5. Uma loja de departamento vende um aparelho de ar condicionador com duas possibilidades de pagamento:

a) Em doze parcelas mensais no valor de R$ 97,49;

b) Em vinte e quatro parcelas mensais de R$ 61,50.

Sabendo-se que as duas possibilidades são sem entrada e que a taxa de juros é de 2,5% a.m., qual a melhor alternativa de compra?

6. Admitindo-se que o valor de um veículo à vista é R$ 50.000,00, mas foi financiado em 24 parcelas sem entrada e dada uma taxa de juros de 3% a.m., qual o valor da parcela a ser paga?

7. Dois amigos em uma "conversa de bar" falavam sobre a aquisição de um veículo, que, para o primeiro, foi um ótimo negócio, pois adquiriu o bem à vista por R$ 30.000,00 em parcelas mensais e iguais de R$ 1.326,06, sem entrada. Como o valor da parcela era baixo, o amigo considerou que o negócio foi bom. Dada uma taxa de juros de 4% a.m., quantas parcelas serão necessárias para quitar o bem?

8. Zé Amarrado tem 24 anos e está analisando a possibilidade de investir em um plano de aposentadoria privada. Seus planos são de aposentadoria com 55 anos, pretendendo manter uma renda mensal de R$ 3.700,00. Considerando uma taxa de juros de 8% a.a., quanto é necessário depositar a partir de hoje para obter tal quantia?

9. Sabendo que um veículo que custa R$ 30.000,00 à vista é financiado em vinte parcelas mensais e sucessivas, além de uma entrada de R$ 7.500,00. Adotando uma taxa de juros de 15% a.a., com capitalização composta e a primeira parcela com vencimento após trinta dias da compra, calcule o valor das parcelas.

10. Nosso velho amigo Chico Seguro pretende trocar o carro daqui a dezoito meses, pretendendo "colocar" na troca a quantia de R$ 18.000,00. Sabendo-se que o rendimento da poupança é de 1,5% a.m., quanto ele deve depositar mensalmente a fim de obter o valor no prazo estipulado?

11. Zé Amarrado está pensando em fazer outro curso superior em uma universidade privada e para isso pretende aplicar R$ 300,00 por mês durante 36 meses no banco INVESTIMENTO S/A. que remunera (paga) 2% a.m. sobre o saldo credor. Qual será o montante acumulado após o último depósito?

GABARITO

1) R$ 6.679,59

2) R$ 10.455,22

3) R$ 1.721,65

4) R$ 1.301,60

5) A primeira é a melhor alternativa

6) R$ 2.952,37

7) 60 parcelas

8) R$ 372,57

9) R$ 1.278,46

10) R$ 865,52

11) R$ 15.598,31

DICA!

Sei que posso parecer um pouco repetitivo, mas estas dicas para realizar um financiamento de veículo valem ouro:

- Tente dar o maior valor de entrada possível;
- Peça isenção da TAC – Isto sempre funciona para financiamentos de veículos;
- Pesquise as taxas em vários bancos;
- Não pague em mais do que 24 meses;
- Se estão dizendo que a taxa é zero, procure outra concessionária da marca e diga que você não quer financiar o veículo, que você quer pagar à vista. Veja como o preço muda;
- Jamais atrase uma parcela.

LENDAS DO FINANCIAMENTO DE VEÍCULO

http://www.emprestimo.org

• “Financie seu veículo com taxa zero”: Mentira, mentira, mentira. Isto não existe. O valor dos juros está embutido no preço da venda;

• Financie um percentual do seu zero quilômetro com taxa zero: mentira muito utilizada pelas grandes montadoras. Mais uma vez, não existe financiamento de veículo com taxa zero. O valor está embutido no preço;

• A TAC no financiamento de veículo é obrigatória: mentira. Negue-se a pagá-la;

• Nossa taxa para financiamento de veículo não muda conforme o valor financiado: mentira. Quanto maior o valor financiado do veículo, maior a taxa utilizada;

• Pague fácil em 84 meses: financiando o veículo desta forma você vai pagar dois carros;

• Só aceitamos financiamentos de veículos do banco abc. Mude de concessionária urgentemente.

RECOMENDAÇÕES

Antes de seguir ao próximo tópico veja as seguintes questões, se tiver dúvida em responder algum dos conceitos volte ao material e apenas em seguida continue. Se não tiver dúvida siga em frente.

1. Você sabe o que é uma renda certa?

2. É o que é uma anuidade?

TÓPICOS ADICIONAIS	ONDE ENCONTRAR / O QUE FAZER
LINKS DA INTERNET	1.www.youtube.com/watch?v=Ej2bxSTwtPM 2. www.youtube.com/watch?v=brz-litlQSE 3. www.somatematica.com.br; 4.www.bcb.gov.br.
SUGESTÕES DE LEITURA	1. Capítulo 5 do livro Matemática Financeira de Washington Franco Mathias e José Maria Gomes (2013).
SUGESTÕES DE EXERCÍCIOS ADICIONAIS	2. Capítulo 5 do livro Matemática Financeira de Washington Franco Mathias e José Maria Gomes (2013).

III

SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO DE EMPRÉSTIMOS

Neste tópico, vamos estudar um pouco sobre empréstimos, que contemplam todos os conteúdos vistos até o momento no decorrer do curso.

No mundo das finanças, as dívidas surgem sempre quando determinado recurso é emprestado por um período de tempo determinado. Se você assume uma dívida, dizemos que tem uma obrigação a pagar, e que essa obrigação deverá ser paga em um momento futuro. Desta forma, surge a figura dos juros como forma de restituição do capital.

Nesta seção especificamente observaremos que, os principais problemas do tema amortização e empréstimos residem na forma como os reembolsos serão executados.

Finalmente, o aspecto mais relevante desta seção é entender que os juros sempre serão calculados sobre o saldo devedor.

Objetivos:

- Apresentar os principais conceitos sobre empréstimos;
- Apresentar os principais sistemas de amortização;
- Classificação das modalidades de amortização.
- Apresentar os principais conceitos sobre inflação;
- Definir taxa nominal e taxa real de juros.

Empréstimos

Banco de Dados/NEaD

Provavelmente que em algum momento de sua vida, você já tenha realizado alguma operação de empréstimo. Se não, vejamos o seguinte: você tem cartão de crédito? Caso tenha, é provável que você já tenha emprestado dinheiro à operadora do seu cartão de crédito objetivando devolvê-lo na data do pagamento da fatura. Então estas operações nos acompanham muito mais do que podemos imaginar. Neste tópico, veremos as modalidades e os conceitos sobre a temática.

O empréstimo é uma modalidade de dívida e surge quando uma determinada quantia é emprestada por um período de tempo determinado. Quem contraiu a dívida é obrigado a devolver (restituir) o valor tomado (principal) acrescidos dos juros devidos. Os empréstimos podem ser de curto, médio ou longo prazo. As formas de cálculo são na maioria das vezes semelhantes, mas nas operações de longo prazo temos algumas características específicas que os diferenciam das características de curto e médio prazo.

"Se o dinheiro for a sua esperança de independência, você jamais a terá. A única segurança verdadeira consiste numa reserva de sabedoria, de experiência e de competência" (Henry Ford)

O principal tópico de diferença entre os prazos dos empréstimos reside na forma de reembolso adotado e a forma de determinação dos juros efetivamente cobrados nos empréstimos de longo prazo. Vale ressaltar que tratamos aqui de juros compostos e os juros sempre serão calculados sobre o saldo devedor.

Por fim é importante ressaltar que os juros sempre serão calculados sobre o saldo devedor.

Meu velho amigo Chico, mudei. Agora serei cantor, já que, trabalhando há "duzentos anos", não consegui ficar rico.
E vai cantar o quê? Forró, sertanejo, axé, pagode, MPB, anos 60?
Que nada! É brincadeira, é porque o dinheiro voa na minha mão, aí resolvi cantar aquela música de Paulinho da Viola:
"dinheiro na mão é vendaval, é vendaval Na vida de um sonhador de um sonhador...
...Quanta gente aí se engana e cai da cama Com toda a ilusão que sonhou..."
Ao menos a música é boa, porque você como cantor é horrível, se você fosse viver da música, certamente ficaria mais pobre do que já é.
E você acha que não sei disso, rapaz? Se não, já teria tentado a vida de cantor. Mas, amigo, o problema é o seguinte: recebo hoje, vou para casa feliz, começo a pagar as contas, e dia 15 já estou sem nada. Tive que fazer um empréstimo para pagar o restante das contas, mas o banco até que me ajudou: dividiu em 60 parcelas bem pequenas. Dessa vez, gostei da minha decisão.
Se sua intenção for ficar mais pobre, a decisão foi ótima. Se você quer sair dessa situação devedora, você fez o que não deveria.
Mas, por quê? O empréstimo foi para pagar o restante das contas.
Se seu dinheiro esse mês não deu pra pagar as contas do mês, imagine quando tiver que pagar o empréstimo que você fez.
É, amigo, não tinha pensado nisso . E agora, o que vou fazer?
Você ao menos sabe qual tipo de empréstimo contratou?
Empréstimo não é tudo igual?
Que tipo de amortização é a sua? Como ficará o saldo devedor?

Alguns termos utilizados para facilitar a compreensão de conceitos utilizados

Credor: Pessoa ou instituição que fornece o empréstimo.

Devedor: Pessoa ou instituição que recebe o empréstimo.

Encargos Financeiros: Custo da operação (juros) para o devedor que retorna para o credor.

Amortização: Pagamento do principal (capital emprestado), geralmente por meio de parcelas periódicas.

IOF: Imposto sobre Operações Financeiras.

Saldo Devedor: Valor da dívida em um determinado momento, depois de deduzido o valor já pago ao credor a título de amortização.

Prestação: É composta pela soma do valor da amortização mais os encargos financeiros devidos em determinado período.

Carência: É o período concedido ao credor para início do pagamento do principal. Pode também ser utilizada para postergar o início do pagamento dos juros.

Sistemas de amortização de empréstimos

Por diversas vezes, recorremos ao crédito para a compra de um bem desejado, principalmente daqueles que demandam maiores quantias, como por exemplo, uma casa, um carro, etc. Este tipo de dívida geralmente é pago em períodos longos, ou seja, será amortizado mediante pagamentos sucessivos e periódicos.

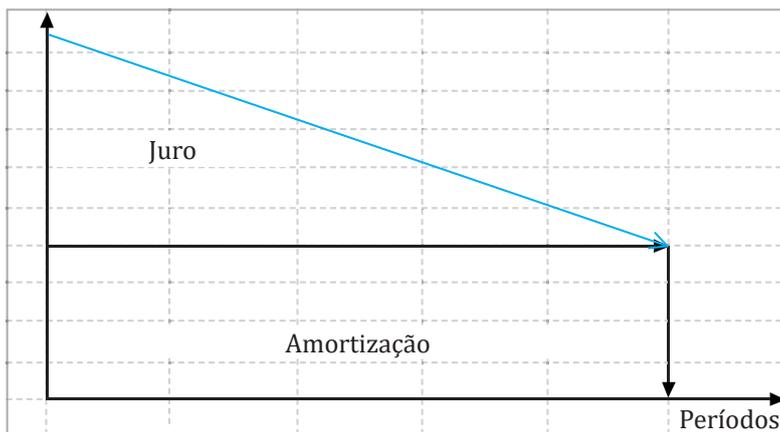
A forma como a dívida será paga, ou seja, a liquidação progressiva de um determinado valor representa a parcela, que, por sua vez, é composta do capital mais juro mais outras taxas envolvidas.

Você , já comprou ou deve conhecer alguém que já tenha comprado a prazo, com isso, deve ter percebido que o valor da compra a prazo foi acrescido em relação ao valor da comprado à vista? Esta diferença de valores representa os juros e as taxas embutidas na operação. Determinar o percentual de cada um desses fatores é o objetivo do estudo do tema amortização.

A forma de cálculo das parcelas e da composição do saldo devedor é determinada pelo sistema de amortização utilizado. Vamos a partir de agora determinar quais e como são calculados os valores em cada um deles.

Sistema de Amortização Constante (SAC)

Neste sistema, as parcelas de amortização são iguais, como sugere sua denominação. Os juros são decrescentes, visto que incidem sobre o saldo devedor – restante a amortizar – e, consequentemente, as parcelas são decrescentes.

O cálculo do valor das amortizações é simples: basta dividir o valor principal – Empréstimo, Valor Financiado ou Aplicação – pelo número de prestações. No cálculo dos juros, leva-se em conta sempre o saldo devedor do período imediatamente anterior. Podemos representar o sistema SAC graficamente da seguinte forma:

Exemplo:

elaborar uma planilha de amortização para o financiamento de um barco que foi adquirido por R$ 180.000,00, sem entrada pelo sistema de amortização SAC, com taxa de juros de 10% a.a.

Resolução

1º Passo: Cálculo das Amortizações:

$$A_1 = \frac{P}{t} = \frac{\text{Financiamento}}{n^0 \text{ de prestaçoes}} = \frac{180.000,00}{4} = 45.000,00 = A_2 = A_3$$

Mês {t	Saldo Devedor $(SD_t = SD_{t-1} - A_1)$	Amortização (A_1)	Juros $(J = i \times SD_{t-1})$	Prestação $(R_t = A_1 + I_1)$
0	180.000,00	-	-	-
1	135.000,00	45.000,00	18.000,00	63.000,00
2	90.000,00	45.000.00	13.500,00	58.500,00
3	45.000.00	45.000.00	9.000,00	54.000,00
4	-	45.000.00	4.500,00	49.500.00

Observação importante: Observe que o valor da prestação também apresenta decréscimo – valor a menos na prestação – igual. Em outras palavras, as prestações diminuem o valor de R$ 4.500,00 todo mês, isto é, 10% do valor da amortização. Tal observação não é coincidência, o decréscimo no SAC corresponde ao produto da taxa de juros unitária pelo valor da amortização.

O método de amortização SAC possui ainda diversos desmembramentos oriundos da forma de e do prazo de pagamento da obrigação. Vejamos:

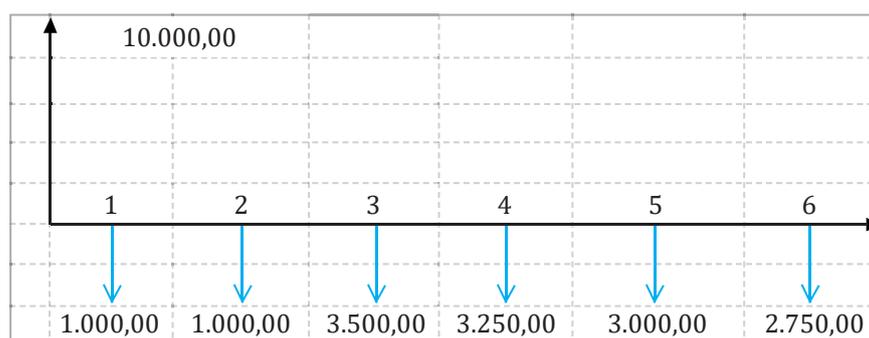
SAC com prazo de carência, pagamento de juros durante a carência e prazo de utilização unitário

Esta forma de empréstimo concede ao devedor um prazo para início da amortização. Vejamos um exemplo: suponha um empréstimo de R$ 10.000,00 com um período de carência de três anos, com os juros sendo pagos anualmente, e sendo cobrada uma taxa de juros de 10% a.a. com o capital (principal) sendo amortizado em quatro parcelas sucessivas e anuais.

Exemplo: Determinando o valor da amortização $A=\frac{10.000,00}{4}=2.500,00$

Montando a tabela de pagamentos, temos:

Período	Saldo devedor ($SD_t = SD_{t-1} - A_1$)	Juros ($J = i \times SD_{t-1}$)	Amortização (A_1)	Prestação ($R_T = A_1 + J_1$)
0	10.000,00	-	-	-
1	10.000,00	1.000,00	-	1.000,00
2	10.000,00	1.000,00	-	1.000,00
3	7.500,00	1.000,00	2.500,00	3.500,00
4	5.000,00	750,00	2.500,00	3.250,00
5	2.500,00	500,00	2.500,00	3.000,00
6	-	250,00	2.500,00	2.750,00
Total				14.500,00

Graficamente, temos:

No exemplo acima, observamos que o início do pagamento se deu no primeiro período. No entanto, ressaltamos que nos três primeiros períodos houve apenas pagamento dos juros e nenhuma amortização do saldo devedor. A partir do terceiro período, iniciou-se o período de amortização do saldo devedor. Logo, a parcela passou a ser composta da amortização acrescida da parcela dos juros.

Na elaboração da tabela acima, devemos ter muito cuidado no momento de calcular o valor dos juros a serem pagos, pois eles sempre terão como base de cálculo o saldo devedor do período imediatamente inferior, por exemplo, no período cinco o valor dos juros cobrados foi de R$ 500,00, pois foi calculado sobre o saldo devedor do período quatro (5.000,00). Vale observar também que o valor total pago foi de R$ 14.500,00, ou seja, R$ 4.500,00 a título de juros.

SAC com prazo de carência, capitalização dos juros e prazo de utilização unitário

Nesta mesma lógica de financiamento, os emprestadores de dinheiro oferecem também uma possibilidade de pagamento dos juros após o período de carência. Esta transação é denominada capitalização dos juros, pois incidiram juros sobre juros. Esta operação é possível apenas quando acordado entre as partes, funcionando como um empréstimo adicional ao valor inicial.

Podemos ainda classificar em dois tipos:

1) Os juros capitalizados serão pagos no primeiro ano da amortização, com as amortizações calculadas em relação ao valor inicial emprestado.

Vejamos o exemplo:

Período	Saldo devedor ($SD_t = SD_{t-1} - A_1$)	Juros ($J = i \times SD_{t-1}$)	Amortização (A_1)	Prestação ($R_T = A_1 + J_1$)
0	50.000,00	-	-	-
1	55.000,00	-	-	-
2	60.500,00	-	-	-
3	37.500,00	16.550,00	12.500,00	29.050,00
4	25.000,00	3.750,00	12.500,00	16.250,00
5	12.500,00	2.500,00	12.500,00	15.000,00
6	-	1.250,00	12.500,00	13.750,00
Total				**74.050,00**

Podemos observar que ao final do terceiro ano ocorreu o pagamento dos juros capitalizados além da primeira parcela da amortização do capital (principal).

2) Outra possibilidade seria o cálculo das amortizações em relação ao valor inicial emprestado mais os juros capitalizados durante a carência.

Período	Saldo devedor ($SD_t = SD_{t-1} - A_1$)	Juros ($J = i \times SD_{t-1}$)	Amortização (A_1)	Prestação ($R_T = A_1 + J_1$)
0	50.000,00	-	-	-
1	55.000,00	-	-	-
2	60.500,00	-	-	-
3	49.912,50		16.637,50	16.637,50
4	33.275,00	4.991,25	16.637,50	21.628,75
5	16.637,50	3.327,50	16.637,50	19.965,00
6	-	1.663,75	16.637,50	18.301,25
Total				**76.532,50**

No exemplo acima, o saldo devedor é determinado pela soma do capital tomado emprestado acrescido dos juros ocorridos durante o período, ou seja, 50.000,00 + 5.000,00 referente ao período 1 + 5.500,00 referente ao período 2 + 6.050,00 referente ao período 3.

Para se determinar o valor da amortização devemos somar o capital aos juros incorridos (dados acima). De tal modo, nosso valor a amortizar é 66.550,00 (50.000,00 + 5.000,00 + 5.500,00 + 6.050,00).

SAC com prazo de carência, capitalização dos juros e prazo de utilização não unitário

Estes casos ocorrem quando o desembolso é dividido em duas ou mais parcelas, assim as demais condições permanecem e o valor da entrada de recursos é parcelado. Suponha o exemplo do item anterior para verificarmos o que acontece com o financiamento.

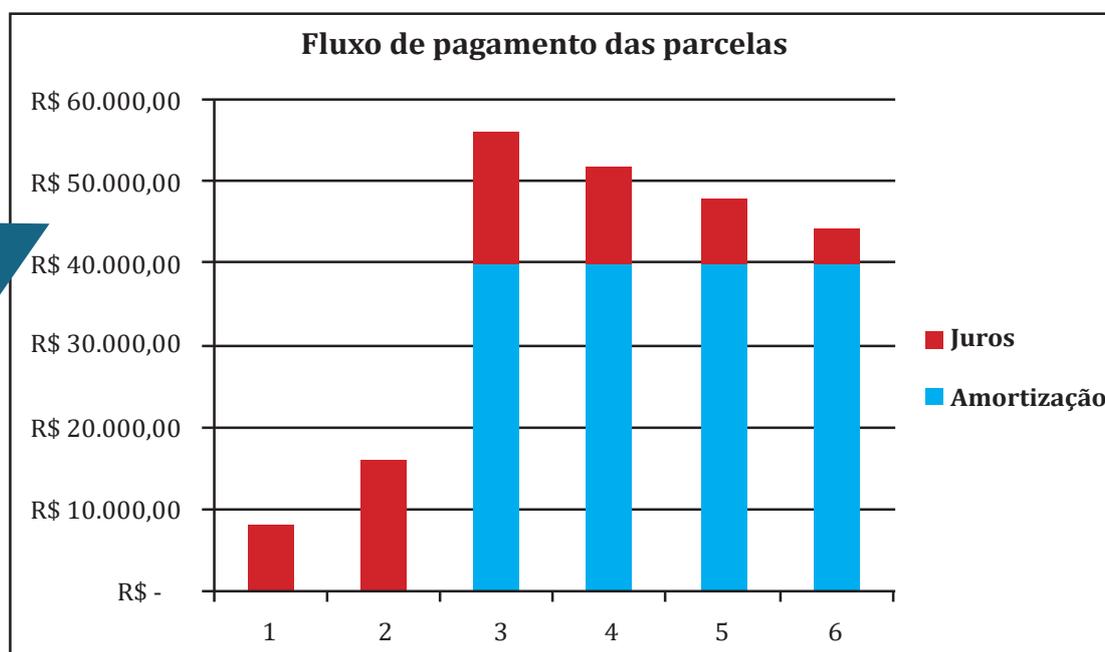
Período	Saldo devedor ($SD_t = SD_{t-1} - A_1$)	Juros ($J = i \times SD_{t-1}$)	Amortização (A_1)	Prestação ($R_T = A_1 + J_1$)
0	R$ 80.000,00			
1	R$ 160.000,00		R$ 8.000,00	R$ 8.000,00
2	R$ 160.000,00		R$ 16.000,00	R$ 16.000,00
3	R$ 120.000,00	R$ 40.000,00	R$ 16.000,00	R$ 56.000,00
4	R$ 80.000,00	R$ 40.000,00	R$ 12.000,00	R$ 52.000,00
5	R$ 40.000,00	R$ 40.000,00	R$ 8.000,00	R$ 48.000,00
6	R$ -	R$ 40.000,00	R$ 4.000,00	R$ 44.000,00
TOTAL		**R$ 160.000,00**	**R$ 64.000,00**	**R$ 224.000,00**

A diferença nos valores reside em um fluxo de parcelas mais uniforme, o que não interfere no resultado final do financiamento. Para comprovar que os valores não são alterados, basta colocá-los em uma mesma data focal. Assim, temos:

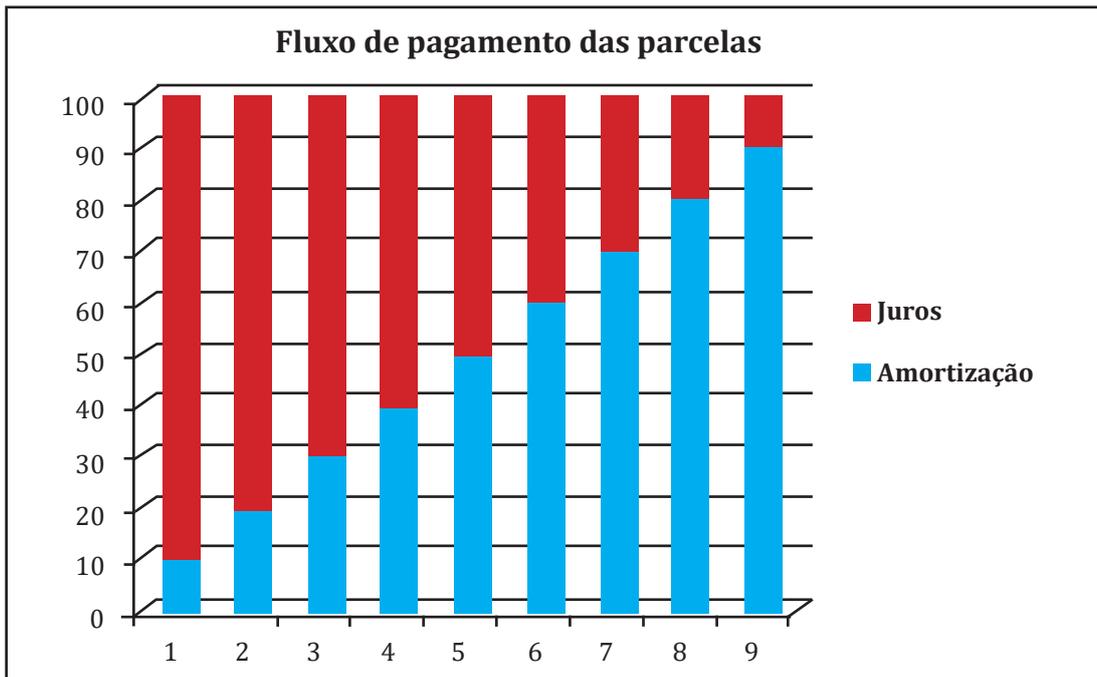
$$VB = \frac{80.000,00}{1,00} + \frac{80.000,00}{1,10} = 152.727,27$$

$$VC = \frac{80.000,00}{1,00} + \frac{16.000,00}{1,21} + \frac{56.000,00}{1,33} + \frac{52.000,00}{1,46} + \frac{48.000,00}{1,61} + \frac{56.000,00}{1,33} = 152.727,27$$

Podemos observar que VB = VC, o que indica que, independentemente da forma como você recebeu o capital, o valor total a ser devolvido é o mesmo.

Graficamente, temos:

Analisando-se o gráfico, observamos que o valor da amortização permanece constante a partir do terceiro período, o que se deve à carência concedida. Anteriormente, nos períodos 1 e 2, ocorre apenas o pagamento dos juros contratados na operação.

Sistema de amortização francês (Price)

Este sistema de amortização tem como característica principal o valor constante das parcelas em termos nominais. Durante o período de pagamentos, o devedor vai desembolsando o mesmo valor da prestação, sabendo que na composição do valor da parcela temos a amortização e os juros. Durante a vigência da série de pagamentos, o devedor vai pagando o mesmo valor da parcela, mas cabe ressaltar que esta parcela é composta por amortização e juros. Então, devemos observar que sua participação vai mudando conforme o andamento da série de pagamentos. Assim, apesar de o valor da parcela ser o mesmo, os percentuais de juros e de amortização vão se alterando.

Veja pelo gráfico acima que o valor da parcela permanece inalterado (R$ 100,00) mais os valores referentes a juros e amortizações vão se alterando durante o período de pagamentos.

Para a presente modalidade de amortização, o valor dos juros é decrescente, o que implica dizer que a amortização é crescente em ordem progressiva. As principais utilizações desse sistema são: financiamentos imobiliários, CDC e empréstimos.

Para se determinar o valor da prestação (PMT), utilizamos a fórmula do valor presente (PV) do modelo básico de anuidades, onde:

$$PV = PMT \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Neste método, a amortização não é linear como em outros métodos. O cálculo do saldo devedor é feito por meio da diferença entre o valor do início do período e a amortização realizada. Logo, o cálculo é dado por:

$$SD = PMT \times \frac{1-(1+i)^{-(n-t)}}{i}$$

Ressalta-se que n é o número total de prestações e (n-t) é o número de prestações a vencer. Isto implica em que os juros são calculados tendo como base o saldo devedor do ano anterior.

Exemplo:

Para exemplificar, vamos aceitar a seguinte situação de empréstimo adquirido junto a uma instituição financeira: valor do empréstimo R$ 10.000,00, taxa de juros contratada 10% a.a. e quatro parcelas anuais.

Para a montagem da planilha, utiliza-se a fórmula da PMT para determinar o valor das parcelas referente ao empréstimo. No caso dos juros, utilizamos a fórmula dos juros. Vamos à planilha:

Período	Saldo devedor ($SD_t = SD_{t-1} - A_1$)	Juros ($J = i \times SD_{t-1}$)	Amortização (A_1)	Prestação ($R_T = A_1 + J_1$)
0	R$ 10.000,00	-	-	-
1	R$ 7.845,29	R$ 1.000,00	R$ 2.154,71	R$ 3.154,71
2	R$ 5.475,11	R$ 784,53	R$ 2.370,18	R$ 3.154,71
3	R$ 2.867,91	R$ 547,51	R$ 2.607,20	R$ 3.154,71
4	R$ 0,00	R$ 286,80	R$ 2.867,91	R$ 3.154,71
SOMA		**R$ 2.618,84**	**R$ 10.000,00**	**R$ 12.618,84**

O sistema PRICE É uma variante do sistema francês que possui as seguintes características:

- Utiliza a taxa proporcional simples (taxa nominal) ao invés da taxa equivalente composta;
- Geralmente, o período das prestações (mensal) é menor do que o da taxa de juros (anual);
- No cálculo, é utilizada a taxa proporcional ao período a que se refere a prestação, calculada a partir da taxa nominal.

Exemplo:

Suponha um empréstimo no valor de R$ 100.000,00, sem carência inicial, com uma taxa de juros contratada de 12% a.a. Sabendo que o empréstimo será pago em oito parcelas, vamos construir a planilha.

O primeiro passo é determinar o fator, pois o número de parcelas (mensal) é inferior à taxa contratada (anual). Portanto, temos: a 8|1 = 7,651678

Logo, $R = \frac{100.000,00}{7,651678} = 13.069,03$

T (meses)	Saldo devedor ($SD_t = SD_{t-1} - A_1$)	Amortização (A_1)	Juros ($J = i \times SD_{t-1}$)	Prestação ($R_T = A_1 + J_1$)
0	100.000,00	-	-	-
1	87.930,97	12.069,03	1.000,00	13.069,03
2	75.741,25	12.189,72	879,31	13.069,03
3	63.429,63	12.311,62	757,41	13.069,03
4	50.994,90	12.434,73	634,30	13.069,03
5	38.435,82	12.559,08	509,95	13.069,03
6	25.751,15	12.684,67	384,36	13.069,03
7	12.939,63	12.811,52	257,51	13.069,03
8	-	12.939,63	129,40	13.069,03
TOTAL	**-**	**100.000,00**	**4.552,24**	**104.552,24**

O fato de o período ser inferior à taxa contratada leva a uma cobrança de juros por um valor acima do informado, pois temos apenas oito meses. Assim, os juros são determinados por: 1 + i = 1,0112 = 1,126825, o que significa que a taxa foi de 12,68% a.a.

Além dos sistemas citados temos ainda outros existentes, porém de pouca utilização no Brasil, são eles:

(a) Sistema Americano, onde o mutuário obriga-se a devolver o capital principal em apenas uma parcela;

(b) Sistema de Amortizações Variáveis, que tem como principal característica a devolução do capital principal em parcelas desiguais;

(c) Sistema de Amortização Misto, representado basicamente pela média aritmética entre o sistema Francês (SF) e o sistema de amortização constante (SAC).

DICA
Caso tenha interesse em aprofundar seus conhecimentos sobre esses sistemas, consulte os autores: Mathias e Gomes (2013) cap. 7 e Assaf Neto (2012) cap. 12.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

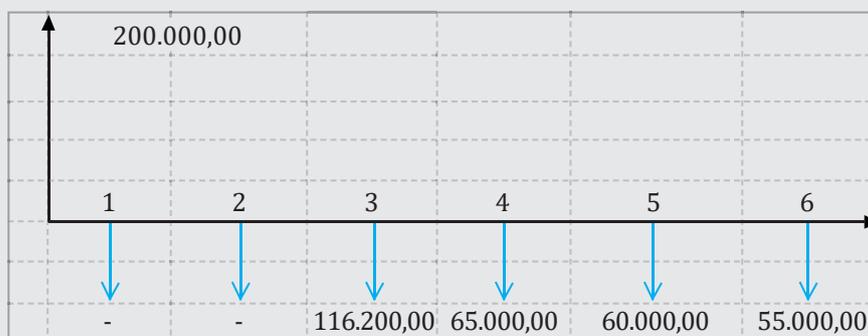
1) Suponha um empréstimo de R$ 200.000,00 com um período de carência de três anos, e que onde os juros serão pagos anualmente, que a uma taxa de juros cobrada é de 10% a.a. e o capital (principal) será amortizado em quatro parcelas sucessivas e anuais. Trabalharemos com o sistema SAC e período de carência.

Resolução:

Determinando o valor da amortização

Montando a tabela de pagamentos, temos: $\frac{200.000,00}{4} = 50.000,00$

Período	Saldo devedor ($SD_t = SD_{t-1} - A_1$)	Juros ($J = i \times SD_{t-1}$)	Amortização (A_1)	Prestação ($R_T = A_1 + J_1$)
0	R$ 200.000,00	-	-	-
1	R$ 220.000,00		-	-
2	R$ 242.000,00		-	-
3	R$ 150.000,00	R$ 66.200,00	R$ 50.000,00	R$ 116.200,00
4	R$ 100.000,00	R$ 15.000,00	R$ 50.000,00	R$ 65.000,00
5	R$ 50.000,00	R$ 10.000,00	R$ 50.000,00	R$ 60.000,00
6	R$ -	R$ 5.000,00	R$ 50.000,00	R$ 55.000,00
Total		R$ 96.200,00	R$ 200.000,00	R$ 296.200,00

Graficamente, temos:

No exemplo acima, observamos que o início do pagamento ocorreu no terceiro período e , que neste mesmo período se deu o iniciou do período de amortização do saldo devedor. Logo, a parcela passou a ser composta da amortização acrescida da parcela dos juros.

2) Suponha um empréstimo no valor de R$ 30.000,00, com uma taxa de juros de 10% a.a., e um período de carência de três anos, com capitalização dos juros durante a carência e com prazo de utilização unitário. Monte a planilha de pagamentos.

Resolução:

Período	Saldo devedor ($SD_t = SD_{t-1} - A_1$)	Juros ($J = i \times SD_{t-1}$)	Amortização (A_1)	Prestação ($R_T = A_1 + J_1$)
0	30.000,00	-	-	-
1	33.000,00	-	-	-
2	36.300,00	-	-	-
3	22.500,00	9.930,00	7.500,00	17.430,00
4	15.000,00	2.250,00	7.500,00	9.750,00
5	7.500,00	1.500,00	7.500,00	9.000,00
6	-	750,00	7.500,00	8.250,00
Total				**44.430,00**

Observe que ao final do terceiro ano ocorreu o pagamento dos juros capitalizados, além da primeira parcela da amortização do capital (principal).

3) Continuando com os dados do exercício anterior, vamos admitir que as amortizações sejam referentes ao capital acrescido dos juros capitalizados durante a carência.

Resolução:

Período	Saldo devedor ($SD_t = SD_{t-1} - A_1$)	Juros ($J = i \times SD_{t-1}$)	Amortização (A_1)	Prestação ($R_T = A_1 + J_1$)
0	30.000,00	-	-	-
1	33.000,00	-	-	-
2	36.300,00	-	-	-
3	29.947,50		9.982,50	9.982,50
4	19.965,00	2.994,75	9.982,50	12.977,25
5	9.982,50	1.996,50	9.982,50	11.979,00
6	-	998,25	9.982,50	10.980,75
Total				**45.919,50**

No item acima, o saldo devedor é determinado pela soma do capital tomado emprestado, acrescido dos juros ocorridos durante o período do contrato, ou seja, R$ 30.000,00 mais R$ 3.000,00 referentes ao primeiro período, mais R$ 3.300,00 referentes ao segundo período e mais R$ 3.630,00 referentes ao terceiro período.

Para se determinar o valor da amortização, devemos somar o capital aos juros incorridos (dados acima). Assim, o valor a ser amortizado é: R$ 39.630,00 (30.000,00 + 3.000,00 + 3.300,00 + 3.630,00).

4) Vamos admitir um empréstimo no valor de R$ 150.000,00, sem carência inicial, , com uma taxa de juros contratada de 10% a.a. Sabendo que o empréstimo será pago em cinco parcelas, vamos construir a planilha.

O primeiro passo a seguir é determinar o fator, pois o número de parcelas (mensal) é inferior à taxa contratada (anual). Desta forma, temos: a 5|10 = 3,790787

Logo, $R = \frac{150.000,00}{3,790787} = 39.569,62$

Período	Saldo devedor ($SD_t = SD_{t-1} - A_1$)	Amortização (A_1)	Juros ($J = i \times SD_{t-1}$)	Prestação (R_T = dado acima)
0	R$ 150.000,00	-	-	-
1	R$ 125.430,38	R$ 24.569,62	R$ 15.000,00	R$ 39.569,62
2	R$ 98.403,80	R$ 27.026,58	R$ 12.543,04	R$ 39.569,62
3	R$ 68.674,56	R$ 29.729,24	R$ 9.840,38	R$ 39.569,62
4	R$ 35.972,39	R$ 32.702,16	R$ 6.867,46	R$ 39.569,62
5	-	R$ 35.972,38	R$ 3.597,24	R$ 39.569,62
TOTAL	**-**	**R$ 150.000,00**	**R$ 47.848,11**	**R$ 197.848,10**

5) Vamos admitir um empréstimo no valor de R$ 200.000,00, sem carência inicial, , com uma taxa de juros contratada de 12% a.a. Sabendo que o empréstimo será pago em oito parcelas, vamos construir a planilha.

O primeiro passo a seguir é determinar o fator, pois o número de parcelas (mensal) é inferior à taxa contratada (anual). Assim, temos: a 8|1 = 7,651678

Logo, $R = \frac{200.000,00}{7,651678} = 26.138,06$

Período	Saldo devedor ($SD_t = SD_{t-1} - A_1$)	Amortização (A_1)	Juros ($J = i \times SD_{t-1}$)	Prestação (R_T = dado acima
0	R$ 200.000,00	-	-	-
1	R$ 175.861,94	R$ 24.138,06	R$ 2.000,00	R$ 26.138,06
2	R$ 151.482,50	R$ 24.379,44	R$ 1.758,62	R$ 26.138,06
3	R$ 126.859,27	R$ 24.623,23	R$ 1.514,83	R$ 26.138,06
4	R$ 101.989,81	R$ 24.869,46	R$ 1.268,59	R$ 26.138,06
5	R$ 76.871,65	R$ 25.118,16	R$ 1.019,90	R$ 26.138,06
6	R$ 51.502,31	R$ 25.369,34	R$ 768,72	R$ 26.138,06
7	R$ 25.879,27	R$ 25.623,03	R$ 515,02	R$ 26.138,06
8		R$ 25.879,26	R$ 258,79	R$ 26.138,06
TOTAL		**R$ 200.000,00**	**R$ 9.104,47**	**R$ 209.104,46**

O fato de o período ser inferior à taxa contratada leva a uma cobrança de juros por um valor acima do informado, pois temos apenas oito meses. Portanto, os juros são determinados por: 1 + i = 1,0112 = 1,126825, o que significa que a taxa foi de 12,68% a.a.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Ao contrair um empréstimo no valor de R$ 16.000,00, um empresário pretende quitá-lo em quatro parcelas por meio do sistema SAC. Sabendo que a taxa de juros cobrada nessa operação é de 2% a.m., determine o valor de cada parcela, sabendo que a primeira parcela vence com trinta dias.

2. A empresa Corporações COPA S/A adquiriu um empréstimo no valor de R$ 1.200.000,00 com prazo de pagamento de setenta e dois meses. A taxa de juros contratada foi de 15% a.a., e as amortizações realizadas anualmente pelo sistema SAC, com carência de dois anos para início do pagamento. Elabore a planilha sabendo que os juros são cobrados durante a carência.

3. Em um anúncio colocado na internet, consta um veículo à venda por R$ 60.000,00 de entrada mais seis parcelas trimestrais de R$ 24.000,00, com uma taxa de juros cobrada de 2,5% a.m. Determine o valor do veículo à vista.

4. A empresa Conteúdo Participações emitiu títulos denominados debêntures, que possuem valor nominal de R$ 60.000,00 e estão cotados atualmente em R$ 55.000,00, com taxa de juros contratada de 12% a.a. sobre o valor nominal com pagamento trimestral de juros e data de vencimento para dois anos e meio. Pergunta-se: qual a taxa de rentabilidade trimestral do título?

5. Suponha um empréstimo de R$ 120.000,00 com um período de carência de três anos, e que os juros serão pagos anualmente, que a taxa de juros cobrada é de 8% a.a. e o capital (principal) será amortizado em quatro parcelas sucessivas e anuais. Trabalharemos com o sistema SAC e período de carência.

6. Suponha um empréstimo no valor de R$ 70.000,00, com uma taxa de juros de 17% a.a., período de carência de três anos, com capitalização dos juros durante a carência e com prazo de utilização unitário. Monte a planilha de pagamentos.

7. Vamos admitir um empréstimo no valor de R$ 350.000,00, sem carência para início de pagamento, com uma taxa de juros contratada de 12% a.a. Sabendo que o empréstimo será pago em oito parcelas, vamos construir a planilha.

8. (Banco do Brasil 2010 - Cesgranrio) Considere um financiamento de R$ 100.000,00, sem entrada, a ser pago em cem prestações mensais, pelo Sistema de Amortização Constante (SAC). Sabendo-se que a taxa de juros, no regime de juros compostos, é de 1% ao mês, a prestação inicial, se o prazo de pagamento for duplicado, será reduzida em:

(a) 100%.

(b) 50%.

(c) 25%.

(d) 10%.

(e) 5%.

9. Um banco concede um financiamento de 80.000 UM para ser liquidado em oito pagamentos mensais pelo SAC. A operação é realizada com carência de quatro meses, sendo juros capitalizados neste período e incorporados ao saldo devedor. A taxa efetiva de juros é 23% a.a. Construa a planilha deste financiamento.

10. Um equipamento no valor de 50.000 UM está sendo financiado por um banco pelo prazo de seis anos. A taxa de juros contratada é de 21% a.a. pelo SF. O banco concede ainda uma carência de três anos para início dos pagamentos, sendo os juros cobrados neste período. Elabore a planilha deste financiamento.

GABARITO

1)

		Pagamento			
Período	**Saldo Inicial**	**Juros**	**Amortização**	**Total**	**Saldo Final**
1	R$ 16.000,00	320	4000	4320	12000
2	R$ 12.000,00	240	4000	4240	8000
3	R$ 8.000,00	160	4000	4160	4000
4	R$ 4.000,00	80	4000	4080	-

2)

Período	**Saldo devedor**	**Amortização**	**Juros**	**Prestação**
0	1.200.000,00	-	-	-
1	1.200.000,00	R$ -	R$ 180.000,00	R$ 180.000,00
2	1.200.000,00	R$ -	R$ 180.000,00	R$ 180.000,00
3	1.062.915,70	R$ 137.084,30	R$ 180.000,00	R$ 317.084,30
4	905.268,76	R$ 157.646,95	R$ 159.437,36	R$ 317.084,30
5	723.974,77	R$ 181.293,99	R$ 135.790,31	R$ 317.084,30
6	515.486,68	R$ 208.488,08	R$ 108.596,22	R$ 317.084,30
7	275.725,50	R$ 239.761,30	R$ 77.323,00	R$ 317.084,30
8		R$ 275.725,48	R$ 41.358,82	R$ 317.084,30
TOTAL		**R$ 1.200.000,00**	**R$ 1.062.505,71**	**R$ 2.262.505,80**

3) 172.003,50

4) 4,0289%

5)

Resolução:

Determinando o valor da amortização, $\frac{120.000,00}{4} = 30.000,00$

Montando a tabela de pagamentos, temos:

Período	**sd**	**sd**	**Amortização**	**Juros**	**Prestação**
0	R$ 120.000,00	R$ 120.000,00			
1	R$ 132.000,00	R$ 129.600,00			
2	R$ 145.200,00	R$ 139.968,00			
3	R$ 159.720,00	R$ 81.445,44	R$ 30.000,00	R$ 39.720,00	R$ 69.720,00
4	R$ 175.692,00	R$ 51.445,44	R$ 30.000,00	R$ 8.144,54	R$ 38.144,54
5	R$ 193.261,20	R$ 21.445,44	R$ 30.000,00	R$ 5.144,54	R$ 35.144,54
6	R$ 212.587,32	-R$ 8.554,56	R$ 30.000,00	R$ 2.144,54	R$ 32.144,54
TOTAL	R$ 1.138.460,52		R$ 120.000,00	R$ 55.153,63	R$ 175.153,63

6)

Resolução:

Período	sd	sd	Amortização	Juros	Prestação
0	R$ 70.000,00	R$ 70.000,00			
1	R$ 77.000,00	R$ 81.900,00			
2	R$ 84.700,00	R$ 95.823,00			
3	R$ 93.170,00	R$ 71.442,91	R$ 17.500,00	R$ 23.170,00	R$ 40.670,00
4	R$ 102.487,00	R$ 53.942,91	R$ 17.500,00	R$ 7.144,29	R$ 24.644,29
5	R$ 112.735,70	R$ 36.442,91	R$ 17.500,00	R$ 5.394,29	R$ 22.894,29
6	R$ 124.009,27	R$ 18.942,91	R$ 17.500,00	R$ 3.644,29	R$ 21.144,29
	R$ 664.101,97		R$ 70.000,00	R$ 39.352,87	R$ 109.352,87

Observe que ao final do terceiro ano ocorreu o pagamento dos juros capitalizados além da primeira parcela da amortização do capital (principal).

7) O primeiro passo a seguir é determinar o fator, pois o número de parcelas (mensal) é inferior à taxa contratada (anual). Assim, temos: a 8|1 = 7,651678

Logo, $R = \frac{350.000,00}{7,651678} = 45.741,60$

Período	sd	sd	Amortização	Juros	Prestação
0	R$ 350.000,00	R$ 350.000,00			
1		R$ 307.758,40	R$ 42.241,60	R$ 3.500,00	R$ 45.741,60
2		R$ 265.094,38	R$ 42.664,02	R$ 3.077,58	R$ 45.741,60
3		R$ 222.003,73	R$ 43.090,66	R$ 2.650,94	R$ 45.741,60
4		R$ 178.482,17	R$ 43.521,56	R$ 2.220,04	R$ 45.741,60
5		R$ 134.525,39	R$ 43.956,78	R$ 1.784,82	R$ 45.741,60
6		R$ 90.129,04	R$ 44.396,35	R$ 1.345,25	R$ 45.741,60
7		R$ 45.288,73	R$ 44.840,31	R$ 901,29	R$ 45.741,60
8			R$ 45.288,71	R$ 452,89	R$ 45.741,60
TOTAL			**R$ 349.999,98**	**R$ 15.932,82**	**R$ 365.932,80**

O fato de o período ser menor do que a taxa contratada leva a uma cobrança de juros por um valor acima do informado, pois temos apenas oito meses. Assim, os juros são determinados por: 1 + i = 1,0112 = 1,126825, o que significa que a taxa foi de 12,68% a.a.

8) Correta: alternativa C

9)

Período	Saque	Amortização	Juros	Prestação
0	R$ 80.000,00			
1	R$ 81.392,00			
2	R$ 82.808,22			
3	R$ 84.249,08			
4	R$ 85.715,02			
5	R$ 75.000,61	R$ 10.714,41	R$ 1.491,44	R$ 12.205,85
6	R$ 64.286,20	R$ 10.714,41	R$ 1.305,01	R$ 12.019,42
7	R$ 53.571,79	R$ 10.714,41	R$ 1.118,58	R$ 11.832,99
8	R$ 42.857,38	R$ 10.714,41	R$ 932,15	R$ 11.646,56
9	R$ 32.142,97	R$ 10.714,41	R$ 745,72	R$ 11.460,13
10	R$ 21.428,56	R$ 10.714,41	R$ 559,29	R$ 11.273,70
11	R$ 10.714,15	R$ 10.714,41	R$ 372,86	R$ 11.087,27
12	-R$ 0,00	R$ 10.714,41	R$ 186,43	R$ 10.900,84

10)

Período	Saque	Amortização	Juros	Prestação
0	R$ 50.000,00			
1	R$ 50.000,00		R$ 10.500,00	R$ 10.500,00
2	R$ 50.000,00		R$ 10.500,00	R$ 10.500,00
3	R$ 50.000,00		R$ 10.500,00	R$ 10.500,00
4	R$ 45.089,85	R$ 4.910,15	R$ 10.500,00	R$ 15.410,15
5	R$ 39.148,57	R$ 5.941,28	R$ 9.468,87	R$ 15.410,15
6	R$ 31.959,62	R$ 7.188,95	R$ 8.221,20	R$ 15.410,15
7	R$ 23.261,00	R$ 8.698,63	R$ 6.711,52	R$ 15.410,15
8	R$ 12.736,66	R$ 10.525,34	R$ 4.884,81	R$ 15.410,15
9		R$ 12.735,66	R$ 2.674,49	R$ 15.410,15
TOTAL	R$ 352.195,70	R$ 50.000,00	R$ 73.960,89	R$ 123.960,90

RECOMENDAÇÕES

Antes de seguir ao próximo tópico veja as seguintes questões, se tiver dúvida em responder algum dos conceitos volte ao material e apenas em seguida continue. Se não tiver dúvida siga em frente.

1. Defina empréstimo
2. Quais as principais modalidades de empréstimo utilizados atualmente no Brasil?

TÓPICOS ADICIONAIS	ONDE ENCONTRAR / O QUE FAZER
LINKS DA INTERNET	1.maisativos.com.br; 2. www.somatematica.com.br; 3.www.bcb.gov.br. 4.www.youtube.com/watch?v=BWJajbIsOcQ
SUGESTÕES DE LEITURA	1. Capítulo 12 do livro Matemática Financeira e suas aplicações de Assaf Neto (2012). 2. Capítulo 7 do livro Matemática Financeira de Washington Franco Mathias e José Maria Gomes. 3. Capítulo 8 do livro Matemática Financeira objetiva e aplicações de Abelardo de L. Puccini (2011)
SUGESTÕES DE EXERCÍCIOS ADICIONAIS	1. Capítulo 7 do livro Matemática Financeira de Washington Franco Mathias e José Maria Gomes. 2. Capítulo 8 do livro Matemática Financeira objetiva e aplicações de Abelardo de L. Puccini (2011)

"O dinheiro é uma felicidade humana abstrata, por isso aquele que já não é capaz de apreciar a verdadeira felicidade humana dedica-se completamente a ele"

(Athur Schopenhauer)

CURIOSIDADES:

1. Alexandre o Grande, que reinou na Macedônia entre 336 e 326 a. C., foi o primeiro homem a ter sua efígie gravada em uma moeda, no ano 330 a. C.

2. Um spa em Nova York oferece máscara facial feita de ouro de 24 quilates! O mineral é absorvido pela pele, reduzindo as rugas. O serviço custa 500 dólares.

3. A cidade de Abu Dhabi, nos Emirados Árabes Unidos, tem caixas eletrônicos que, em vez de dinheiro, dispensam barras de ouro de vinte e quatro quilates.

4. A Mercedes-Benz produziu um carro recoberto com uma camada de trezentos mil cristais. O automóvel de luxo sai por um milhão de dólares.

5. A privada mais cara do mundo vale trinta e sete milhões de dólares. Isto porque ela foi construída em ouro maciço de vinte e quatro quilates. A peça está exposta na empresa de tecnologia Hang Fung Gold, em Hong Kong, e foi feita para ser admirada ao invés de usada.

6. A loja de brinquedos alemã Steiff produziu em dois mil e onze, em homenagem aos cento e vinte e cinco anos do ursinho de pelúcia, o exemplar desse bichinho mais valioso do mundo. O brinquedo tem olhos de diamante com safira, pelos de fios de ouro e um nariz de ouro maciço de vinte e quatro quilates. Ele custa setenta mil dólares.

Efeitos financeiros da inflação

Banco de Dados/NEaD

O processo inflacionário traz consequências positivas e negativas para investidores e credores. Assim, considerar a inflação boa ou má é questão de ponto de vista. Segundo Mathias e Gomes (2004), o Brasil tem uma cultura inflacionária que tende a acomodar os conflitos distributivos e as transferências de renda por meio da própria inflação.

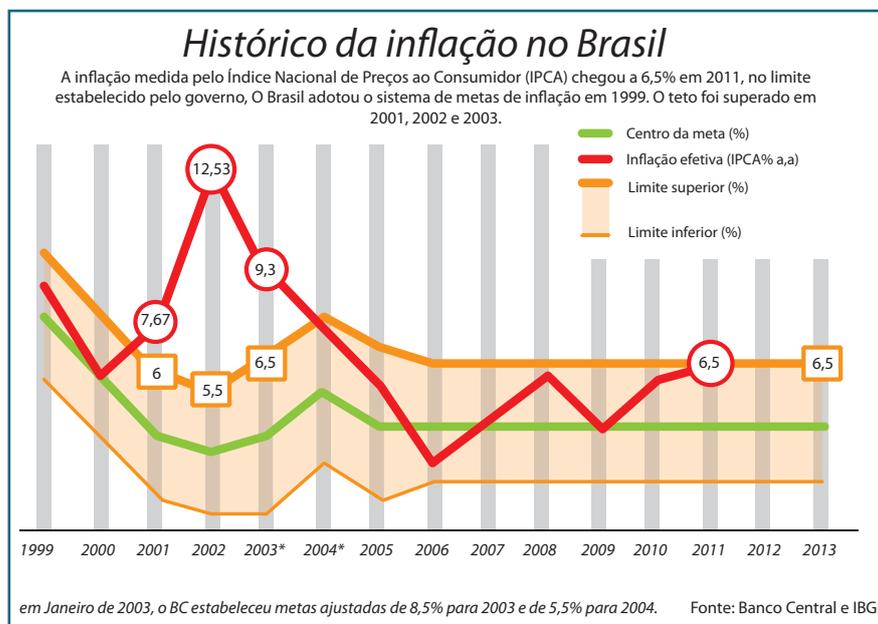
Nos capítulos anteriores, conhecemos e aplicamos os conceitos de Matemática Financeira sem considerar os efeitos da inflação. Isto quer dizer que a moeda foi considerada estável ao longo do período analisado. Não considerar estes efeitos pode alterar bastante o resultado final de uma operação financeira.

Você provavelmente já ouviu ou leu nos noticiários algo sobre a inflação. Atualmente, a inflação está sob controle, mas já tivemos períodos de hiperinflação, quando os preços subiam diariamente. Nos anos de 1980 e início dos anos de 1990, esse era o cenário que nos acompanhava. Nesse período, o valor do dinheiro se alterava rapidamente devido aos efeitos da inflação. Mas, afinal, o que é inflação? Vamos rever alguns conceitos fundamentais vistos na primeira seção do nosso material, para depois prosseguirmos com nossos estudos.

INFLAÇÃO:

Segundo Silva (2008), é a deterioração do poder aquisitivo da moeda. Com o passar do tempo, o capital vai perdendo poder aquisitivo. Apenas consideramos inflação quando os valores crescem gradativamente em dado período de tempo. Porém, as elevações de preços sazonais, como ocorre com os produtos agrícolas que dependem das safras (queda) e na entressafra (alta), não são consideradas inflacionárias.

DEFLAÇÃO:

É o oposto da inflação, significa um processo de queda nos preços das mercadorias durante um intervalo de tempo. Pode parecer difícil de acontecer, mas na verdade ocorre com a mesma frequência da inflação. Podemos citar, por exemplo, os equipamentos de informática: o lançamento de um modelo novo acarreta na deflação do modelo anterior (ficou velho, defasado). Então, tanto a inflação como a deflação implicam em consequências para a economia como um todo.

Podemos observar que, apesar de alguns saltos, a inflação manteve-se estável nos últimos anos. A inflação pode influenciar nossa análise financeira e criar o que os economistas chamam de "ilusão monetária", que significa que as operações podem não ser tão lucrativas ou vantajosas quanto parecem.

Neste contexto de inflação, é importante determinar a taxa real de juros e o custo ou rendimento real de um financiamento ou aplicação. Em contextos inflacionários, as expressões “em preços correntes” e “em preços constantes” são muito utilizadas.

ÍNDICE DE PREÇOS:

Determina a mudança ocorrida nos níveis de preços de um período para outro . e as variações de um conjunto de bens a partir de uma data inicial e final. O índice mais utilizado é o Índice Geral de Preços da FGV, indicado para inflacionar ou deflacionar preços. No entanto, para comparações específicas e obtenção de taxas reais de crescimento e reajustes de valores, diversos setores, tais como o da construção civil e produtos agropecuários, utilizam índices específicos.

TAXA DE JUROS APARENTE E REAL:

Como taxa aparente, consideramos aquela que vigora nas operações correntes. Já a taxa real é o rendimento ou custo de uma operação, seja de aplicação ou de captação calculadas, depois de extraídos os efeitos inflacionários.

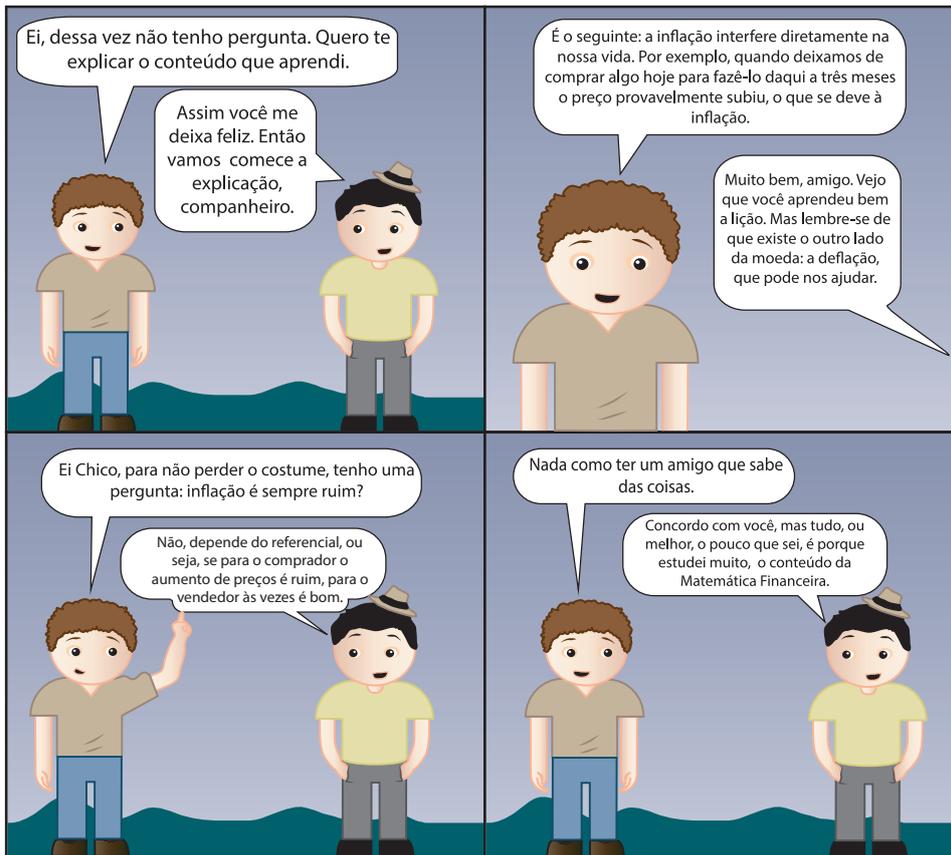
A relação entre taxa aparente e real é determinada da seguinte forma:

$(1+i) = (1+i_r) \times (1+I)$

Onde:

i = taxa aparente;

i_r = taxa real;

I = taxa de inflação.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

1. Determine a taxa de rendimento real a partir de uma taxa de juros aparente de 7% a.m. e um índice de inflação de 3% a.m.

Resolução:

$i = 7\%$ a.m.; $I = 3\%$ a.m. $i_r = ?$

$$ir=\frac{(1+i)}{(1+I)}-1=\frac{1,07}{1,03}-1=3,8835\%\text{ a.m.}$$

Devemos ter cuidado, pois em princípio parecia que o rendimento real seria de 4% a.m. (7-3), mas o rendimento é de 3,85% a.m.

2. Determinada aplicação financeira rende juros nominais de 6% a.a., capitalizados mensalmente. Sabendo que a inflação é de 5,5% a.a., determine as taxas de juros aparente e real desta aplicação.

Resolução:

$j = 6\%$ a.a.; $k = 12$; $I = 5,5\%$ a.a.; $i_a = ?$; $ir = ?$

Primeiramente, determinamos a taxa aparente: $(1+i_a)=(1+\frac{j}{k}1)^k$

$$(1+i_a)=(1+\frac{0,06}{12}1)^{12} \rightarrow i_a = 6,17\%\text{a.a.}$$

Em seguida, determinamos a taxa real:

$$ir=\frac{(1+ia)}{(1+I)}-1=\frac{1,06168}{1,055}-1=0,63\%\text{a.a.}$$

3. O Banco Agrícola Investimentos emprestou R$ 1.000,00 e pretende receber de volta R$ 1.400,00 após um ano. Sabendo que a inflação do período foi de 14% a.a., qual a taxa real de juros deste empréstimo?

VP = 1.000,00; VF = 1.400,00; j = 14% a.a. i_r = ?

$$ir = \frac{1.400,00}{1.000,00} - 1 = 40\% \text{ a.a.}$$

4. Qual foi a rentabilidade de um fundo de investimento que apresentou retorno nominal de 60% a.a, com a inflação do período em 18% a.a?

j = 18% a.a.; i = 60% a.a.; i_r =?

$(1+i) = (1+j) \times (1+i_r) \rightarrow (1+60\%) = (1+18\%) \times (1+i_r)$

i_r = 35,59% a.a

5. Um investidor estrangeiro adquiriu um título de renda fixa por RS 10.000,00 e o resgatou pela quantia de R$ 15.000,00 após um período de seis meses. Qual foi o retorno real desse investimento considerando uma taxa de desvalorização cambial para o período de 25% a.s.?

j = 25% a.a.;

$$i = \frac{15.000,00}{10.000,00} - 1 = 50\% \text{ a.s.}$$

ir =?

$(1+i) = (1+j) \times (1+i_r) \rightarrow (1+50\%) = (1+25\%) \times (1+i_r)$

i_r = 20% a.s

▸EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Um capital foi aplicado durante dois anos com uma taxa aparente de 18% a.a., com capitalização mensal e rendeu R$ 1.500,00 de juros. Sabendo que a inflação no ano é de 12% a.a., determine o capital e a taxa de rentabilidade aparente e real da aplicação.

2. Determine o custo real de um empréstimo contratado a uma taxa efetiva de 20%, sabendo que a inflação do período foi de 15%.

3. Determine em moeda nacional o custo efetivo mensal de um empréstimo em moeda estrangeira contratado com taxa efetiva de 3% a.a., considerando uma taxa de desvalorização da moeda de 2% a.a.

4. Determine a taxa de juros mensal aparente que permita um banco auferir juros reais de 4% a.m., considerando as seguintes hipóteses: 12% a.m.; 420% a.a.; 200% a.s.

5. Josué vendeu sua residência e investiu o valor de R$ 430.000,00, que lhe proporcionou R$ 22.500,00 de juros em um período de nove meses. Sabendo que a inflação foi de 3,8% a.m., quais foram as rentabilidades aparente e real do investimento?

6. Uma indústria acaba de adquirir uma máquina fatiadora por R$ 250.000,00. Considerando que havia duas opções de compra: à vista por R$ 250.000,00 ou 18 parcelas mensais e iguais com atualização monetária, calcule o valor unitário das parcelas sabendo que a taxa de juros é de 96% a.a.

7. Carlos adquiriu uma máquina transportadora de bens por R$ 60.000,00 em doze parcelas mensais de R$ 7.000,00. Sabendo que a taxa de juros era de 2,5% a.m., qual era a inflação esperada para o período?

8. O rendimento nominal do índice Ibovespa foi de 45% a.a., com a inflação para o mesmo período em 34% a.a. Qual foi o retorno real do investimento?

9. Para cursar a disciplina Matemática Financeira, um aluno adquiriu um notebook por R$ 5.000,00, com entrada de 10% e saldo devedor a ser pago após quatro meses em parcela única. Nessa operação, foram acertados juros de 1% a.m. mais variação cambial, que durante o período variou foi de 3%, 2,5%, 2% e 1,5%, respectivamente. Qual foi o valor da parcela paga?

10. Determine a taxa anual a ser cobrada por uma instituição financeira que almeja obter um ganho real de 2% a.t. mais uma correção monetária de 12% a.b.

GABARITO

1) R$ 3.492,41; 19,56% a.a.; 6,75% a.a.

2) 4,3478% no período

3) 5,06% a.a

4) 16,48% a.m.; 19,3164% a.m.; 24,8974% a.m.

5) Aparente 0,5683% a.m.; real - 3,1134% a.m.

6) R$ 24.017,31

7) 3,02% a.m.

8) 8,21% a.a.

9) R$ 5.118,29

10) 113,65% a.a.

RECOMENDAÇÕES

Antes de seguir ao próximo tópico veja as seguintes questões, se tiver dúvida em responder algum dos conceitos volte ao material e apenas em seguida continue. Se não tiver dúvida siga em frente.

1. Defina inflação.
2. Como a inflação pode influenciar nossa vida?

TÓPICOS ADICIONAIS	ONDE ENCONTRAR / O QUE FAZER
LINKS DA INTERNET	1. www.somatematica.com.br; 2.www.bcb.gov.br. 3.www.youtube.com/watch?v=bRouG7QOeiE 4. maisativos.com.br
SUGESTÕES DE LEITURA	1. Capítulo 10 do livro Matemática Financeira objetiva e aplicada de Abelardo de L. Puccini (2011). 2.Capítulo 1 do livro Matemática Financeira de Washington Franco Mathias e José Maria Gomes (2012).
SUGESTÕES DE EXERCÍCIOS ADICIONAIS	1. Capítulo 10 do livro Matemática Financeira objetiva e aplicada de Abelardo de L. Puccini (2011). 2.Capítulo 1 do livro Matemática Financeira de Washington Franco Mathias e José Maria Gomes (2012).

REFERÊNCIAS

ARRAIS, Fellipe Neri de Oliveira. A contribuição da matemática financeira no ensino médio: o despertar do aprendente para a economia doméstica. **Dissertação (Mestrado)** 2013. 63f. Programa de Pós-graduação em Matemática. Universidade Federal Rural do Semi-Arido (UFERSA). 63 pag.

ASSAF NETO, Alexandre. **Matemática Financeira e suas aplicações**. 12. ed. São Paulo: Atlas, 2012.

BRUNI, Adriano Leal; FAMÁ, Rubens. **Matemática Financeira:** com HP 12-C e Excel. 3. ed. São Paulo: Atlas, 2004.

CASTANHEIRA, N. P.; MACEDO, L. R. D**. Matemática Financeira Aplicada**. 2.ed. Curitiba: IBPEX, 2006.

FARIA, Rogério Gomes de. **Matemática comercial e financeira:** com exercícios e cálculos em Excel e HP-12C. São Paulo: Ática, 2007.

MATHIAS, Washington Franco; GOMES, José Maria. **Matemática financeira.** 6. ed. São Paulo: Atlas, 2013.

PUCCINI, Abelardo de Lima. **Matemática financeira**: objetiva e aplicada. 9. ed. São Paulo: Elsevier, 2011.

SAMANEZ, Carlos Patrício. **Matemática financeira**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

SILVA, André Luiz Carvalhal da. **Matemática financeira aplicada**. 2. ed. São Paulo: Atlas, 2008. (Coleção Coppead de Administração)